ION CUCULESCU
CONSTANTIN OTTESCU
OLIMPIA POPESCU

GEOMETRIE

VIII

Prof. univ. ION CUCULESCU

Prof. CONSTANTIN OTTESCU Prof. OLIMPIA POPESCU

MATEMATICĂ 8

Manual pentru clasa a VIII-a

GEOMETRIE



Editura didactică și pedagogică
București—1983

PUNCTE, DREPTE, PLANE

Introducere

În clasele precedente ne-am ocupat cu studiul anumitor mulțimi de puncte ale unui plan. Le-am numit figuri geometrice și le-am concretizat prin desene. Dar lumea care ne înconjoară nu este o lume de figuri plane. Există o deosebire între personajele „plate" ale unui film de cinematograf și cele „în spațiu", în relief de pe scena unui teatru, cum există o deosebire între fotografie și obiectul fotografiat.

În geometria în spațiu ne vom ocupa, prin abstractizare, cu mulțimi de puncte din lumea care „are relief". Pentru aceasta trebuie să pornim de la noțiuni „primare", de la lucruri despre care „știm ce înseamnă", pe care nu le definim prin altele, ci, cel mult, le descriem pentru înțelegere prin comparații, prin concretizări.

PUNCTUL din geometria în spațiu este similar cu cel din geometria în plan. Nu are „întindere" și nu poate fi confundat cu o bulină.

DREAPTA, de asemenea, o cunoaștem din geometria în plan. Este comparabilă cu un fir bine întins, presupus „prelungit oricît", dar, spre deosebire de acesta, n-are grosime. Se consideră a fi o mulțime de puncte.

PLANUL este comparabil cu suprafața unei ape liniștite. Asemănarea este însă foarte aproximativă, pentru că „apa liniștită" este o porțiune a unui glob (cel terestru). Planul n-are nici el grosime, nu este „strat", conține drepte, este o mulțime de puncte.

În figura 1.1 sînt desenate un punct A, o dreaptă d și un plan α. Notăm punctul cu o literă mare, iar dreapta cu o literă mică din alfabetul latin și planul cu o literă din alfabetul grec. Aceasta este o simplă convenție de notație, de la care ne putem uneori abate.





Fig. 1.1.

Planul îl desenăm (deși este nemărginit, conținînd drepte, așa cum vom vedea mai departe), printr-o porțiune a sa dreptunghiulară, care, în perspectivă* va apărea ca un paralelogram.

Alteori, pentru a nu complica figura, vom reprezenta, în desen, planul ca pe un triunghi.

---

* Vom explica într-una din lecțiile următoare ce se înțelege prin „perspectivă".

PROPOZIŢII DESPRE PUNCTE, DREPTE ŞI PLANE

Considerăm adevărate, de la început, următoarele propoziţii:

P_1. *Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una; orice dreaptă are cel puţin două puncte distincte.*

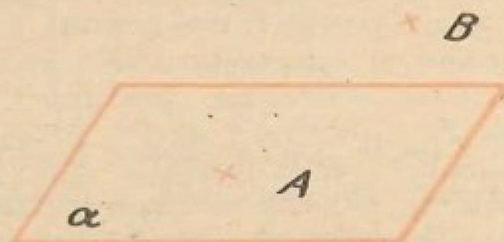
Prima parte a acestei afirmaţii se mai poate formula şi astfel: *Două puncte determină o dreaptă şi numai una.*

P_2. *Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la ea şi numai una.* (Postulatul lui Euclid.) (Acceptăm deci implicit că două paralele sînt în acelaşi plan.)

P_3. *Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan şi numai unul care să le conţină; într-un plan există cel puţin trei puncte necoliniare.*

Prima parte a acestei afirmaţii se mai poate formula: *Trei puncte necoliniare determină un plan şi numai unul.*
Dacă punctul A este în planul α (fig. 1.2) se scrie $A \in \alpha$ şi dacă punctul B nu aparţine planului α, se scrie $B \notin \alpha$.

Fig. 1.2

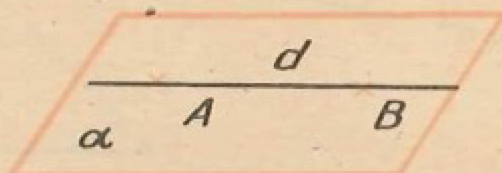


Observaţie. Propoziţiile P_1 şi P_2 erau adevărate şi în geometria plană.

P_4. *Dacă două puncte distincte A şi B sînt situate într-un plan, dreapta determinată de ele are toate punctele în acest plan.*

Altfel spus: *Dreapta determinată de punctele A şi B, situate în planul α, este conţinută (sau situată) în planul α* (fig. 1.3).

Fig. 1.3



Din această ultimă propoziţie rezultă că un plan este nemărginit, aşa cum afirmam în pagina anterioară.

P_5. *Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au încă cel puţin unul.*

Consecinţă: *Două plane distincte, care au un punct comun, au o dreaptă comună.*

Într-adevăr, dacă planele α şi β au un punct P comun, mai au încă un punct Q comun, deci au şi dreapta PQ comună (am notat, de data aceasta, dreapta, nu printr-o singură literă mică, ci prin două din punctele ei) (fig. 1.4)

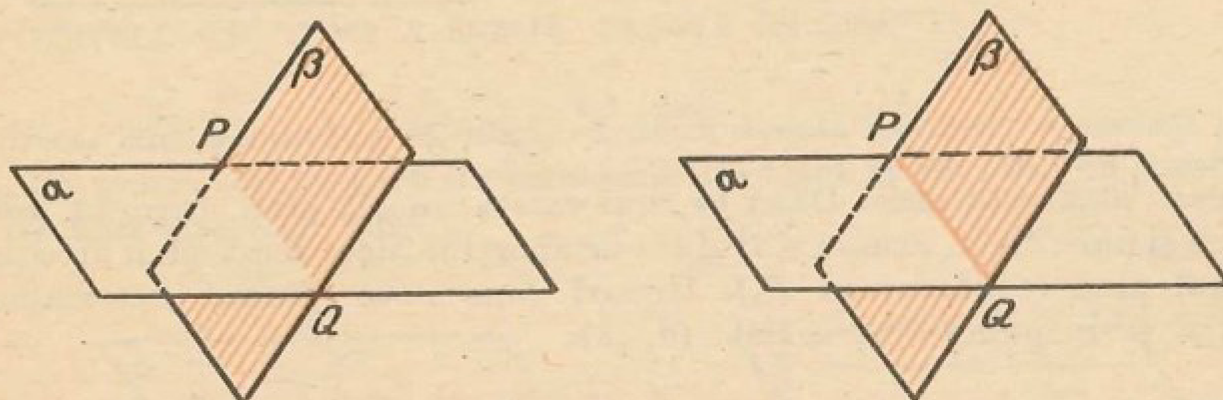


Fig. 1.4

Observaţie. Consecinţa de mai sus nu exclude existenţa a două plane care n-au nici un punct comun (acestea se numesc plane paralele şi de ele ne vom ocupa mai tîrziu).

P_6. *Există patru puncte nesituate în acelaşi plan (necoplanare).* Această propoziţie, împreună cu P_3, ne „scoate în spaţiu". Fără ea am studia tot geometria în plan.

* * *

În fiecare plan din spaţiu, considerăm adevărate toate propoziţiile (axiomele şi teoremele) valabile în geometria plană. În plus, relaţiile de congruenţă şi asemănare „operează" şi în planuri diferite. De pildă, două triunghiuri pot fi congruente, chiar dacă nu sînt în acelaşi plan (bineînţeles aceasta înseamnă că am acceptat aceeaşi afirmaţie pentru segmente şi unghiuri). Toate relaţiile de ordine se menţin, de asemenea.

DETERMINAREA PLANULUI

1) P_3 ne afirmă că: *Trei puncte necoliniare determină un plan.*

Din acest motiv, uneori, vom nota planul care conţine punctele A, B, C, astfel: (ABC).

Vom demonstra că:

2) *O dreaptă şi un punct care nu-i aparţine determină un plan.* (Prin „determină un plan" înţelegem că există un plan şi numai unul care le conţine.)

Într-adevăr, fie d şi $A \notin d$ (fig. 1.5). Ţinînd seama de a doua parte a lui P_1, putem considera două puncte B şi C aparţinînd dreptei d. Punctele A, B, C determină un plan care conţine şi dreapta d, pentru că îi aparţin atît B cît

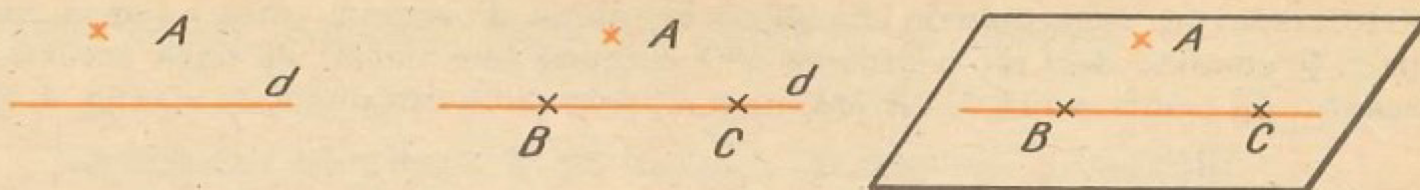


Fig. 1.5

şi C. Acest plan este unic. Dacă ar mai exista un alt plan, care să conţină dreapta d şi punctul A, atunci şi B şi C i-ar aparţine, deci acest plan ar coincide cu primul plan (conform cu P_3). Uneori vom nota planul determinat de dreapta d şi de punctul A astfel: (d, A).

3) *Două drepte care au un punct comun determină un plan.*

Fie dreptele d_1 şi d_2, concurente în A (fig. 1.6). Luăm $M \in d_2$, $N \in d_1$. Punctele A, M, N determină un plan care, evident, conţine dreptele date.

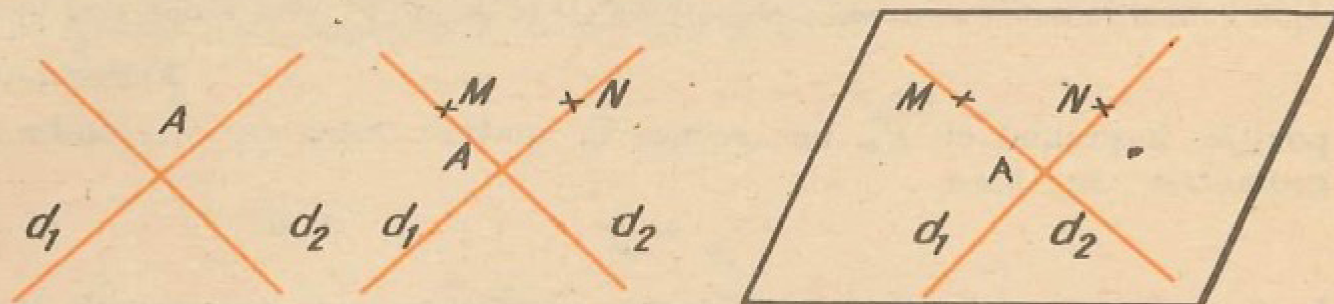


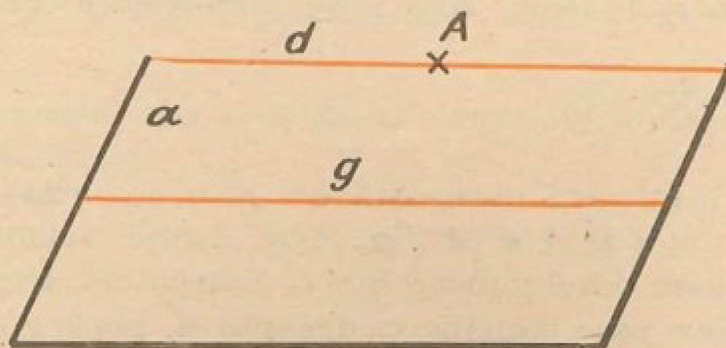
Fig. 1.6

Dacă ar mai exista un alt plan, care să conţină aceste drepte, ar conţine şi cele trei puncte, deci ar coincide cu primul.

4) *Două drepte paralele determină un plan.*

Fie d şi g două drepte paralele şi $A \in d$. Punctul A şi dreapta g determină planul α. Dacă ţinem seama de P_2, afirmăm că d şi g sînt coplanare. Fie β planul lor. Dar planele α şi β au comune dreapta g şi punctul A, deci coincid (fig. 1.7).

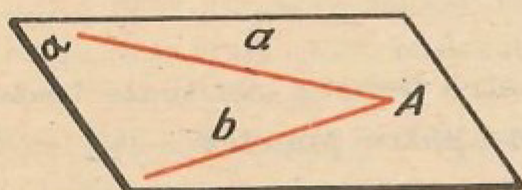
Fig. 1.7



POZIŢIILE RELATIVE ALE DREPTELOR ŞI ALE PLANELOR ÎN SPAŢIU

POZIŢIILE RELATIVE A DOUĂ DREPTE ÎN SPAŢIU

Ştim, din geometria în plan, că două drepte (situate în acelaşi plan) pot avea un punct comun (pot fi concurente) sau pot să nu aibă un punct comun (să fie paralele) (fig. 1.8).



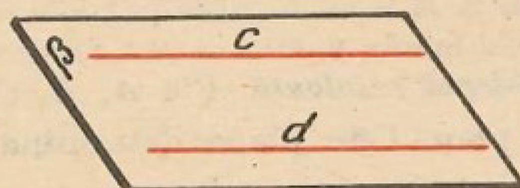


Fig. 1.8

În spaţiu există însă şi drepte care, deşi nu sînt paralele, n-au nici un punct comun. Ca exemplu, închipuiţi-vă încăperea din figura 1.9. Consideraţi marginea *a* a peretelui pe care există tabla şi latura *b* a podelei. Bineînţeles că aceasta nu constituie o demonstraţie! Să încercăm să demonstrăm această propoziţie.

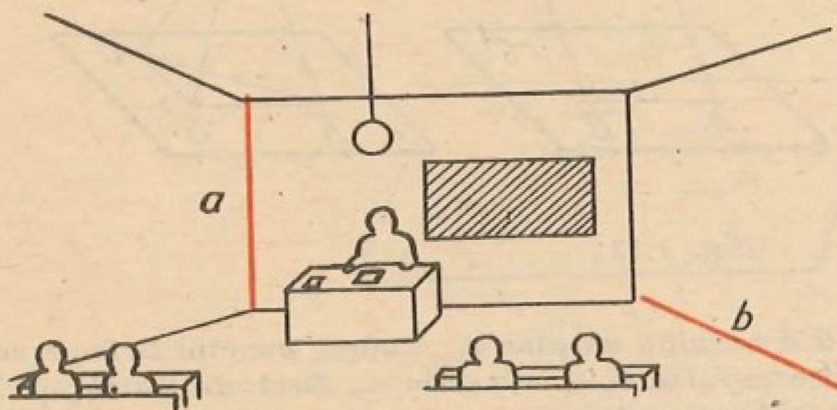


Fig. 1.9

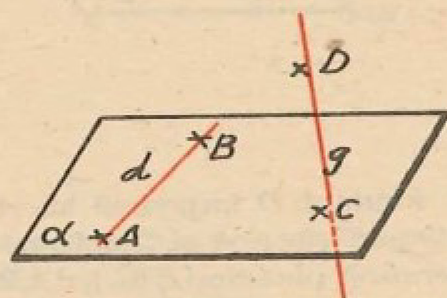


Fig. 1.10

Ne vom folosi de P_6. Fie punctele A, B, C, D nesituate în acelaşi plan. Considerăm dreapta d (care trece prin A şi B) şi g dreapta (care trece prin C şi D) (fig. 1.10), $d \cap g = \varnothing$. Dacă d şi g s-ar întîlni, ar însemna că A, B, C, D ar fi coplanare. Dar aceasta este contrară ipotezei. Vom numi astfel de drepte, care nu au nici un punct comun şi nu sînt nici paralele, drepte *necoplanare*.

Ştim că, în general, desenăm dreptele ca pe nişte interioare de segmente. De obicei vom desena ca în figura 1.11:

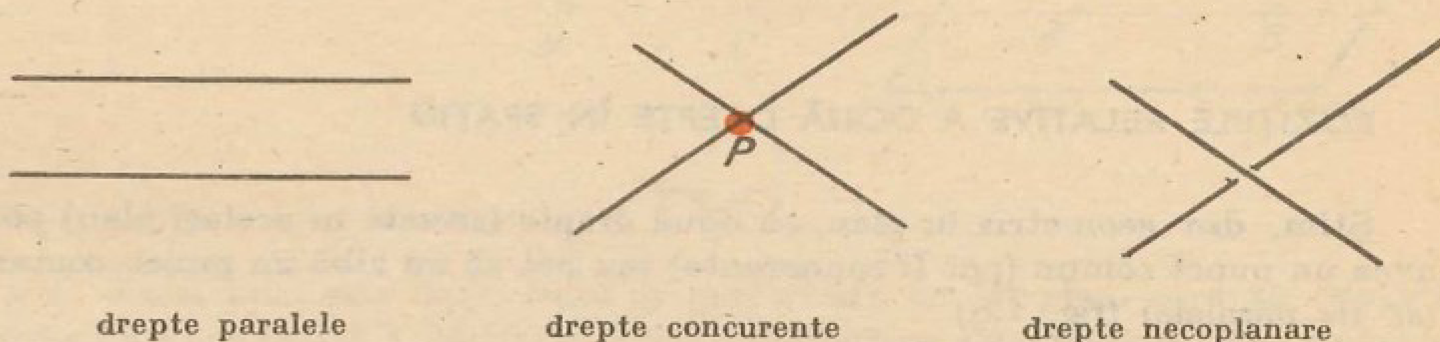


Fig. 1.11

Problemă rezolvată. Fie A, B, C, D patru puncte, nesituate toate într-un acelaşi plan. Cîte plane determină aceste patru puncte?

Rezolvare. Fie α planul determinat de punctele A, B şi C (fig. 1.12). Evident, A, B, C nu sînt coliniare, căci, dacă ar fi coliniare, atunci dreapta care le conţine, împreună cu D, ar determina un plan şi deci A, B, C, D ar fi coplanare. Deci în afara planului α rămîne numai punctul D.

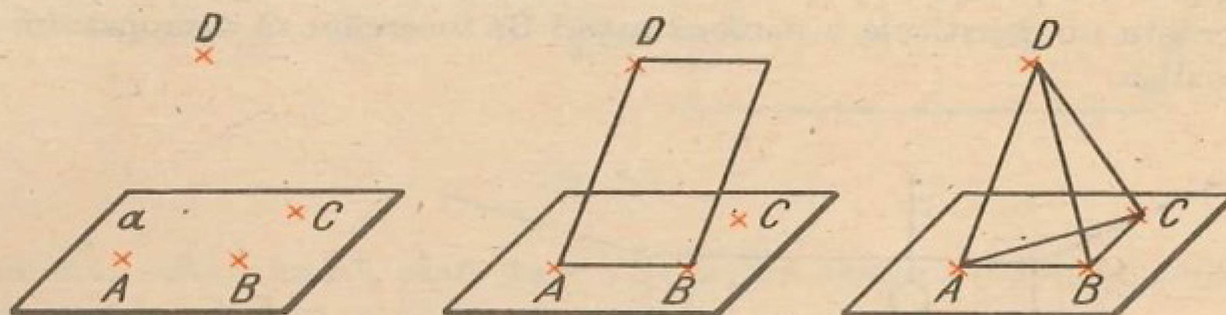


Fig. 1.12

Punctul D împreună cu A şi B determină un plan α_1. Analog, punctul D împreună cu B şi C şi cu A şi C determină cîte un plan α_2 şi respectiv α_3. Deci cele patru puncte determină planele (ABC), (ABD), (BCD) şi (ACD).

Am mai putea gîndi şi astfel: cîte grupe de cîte trei puncte, dintre punctele A, B, C, D, putem forma, astfel încît două grupe să difere între ele printr-un punct? Putem lua perechea (A, B) cu C şi cu D, şi obţinem (ABC), (ABD). Putem lua perechea (B, C) cu D şi obţinem (BCD) (cu A s-a considerat mai sus). Dacă mai considerăm şi grupa (ACD), am obţinut cele patru plane determinate de punctele A, B, C, D.

Sau altfel: odată ce am ales trei puncte din patru (care determină un plan), rămîne în afara acestui plan un singur punct.

În cîte moduri poate rămîne un punct „afară"? Evident, în patru moduri. Deci există patru plane diferite.

1. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare.

a) Pot fi coliniare? Justificaţi răspunsul dat.

b) Unindu-le două cîte două, cîte astfel de drepte se pot duce?

2. Dîndu-se patru puncte, dintre care oricare trei sînt coliniare, cîte drepte determinate de cîte două dintre ele se pot duce? (În loc de „se pot duce" putem spune „există", deoarece uneori nu le vom desena ci numai vom demonstra că ele sînt determinate.)

3. Din patru puncte date, exact trei sînt coliniare.

a) Cîte plane diferite, care să conţină trei dintre ele, necoliniare, există?

b) Cîte plane care să conţină trei dintre ele există?

4. Fie d şi g, două drepte coplanare. Fie A un punct aparţinînd lui d şi B un punct aparţinînd lui g. Să se arate că M, mijlocul segmentului AB, se află în planul determinat de d şi g.

5. Într-un plan α sînt date punctele distincte M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 şi, în afara lui, un punct M_7.

a) Care este cel mai mic număr de plane, exceptînd planul α, determinate de trei dintre ele şi în ce situaţie se obţine? b) Dar cel mai mare? c) Există numai trei astfel de plane?

6*. Într-un plan α sînt date 6 puncte distincte, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 şi în afara lui, un punct M_7.

a) Care este cel mai mic număr de drepte, care să treacă prin cel puţin două dintre ele? b) Dar cel mai mare număr?

7. În figura 1.3, punctele A şi B nu sînt situate în planul α. Dacă $\{P\} = AB \cap \alpha$ şi Q un punct oarecare al planului α, să se arate că $PA - PB \geqslant |QA - QB|$.

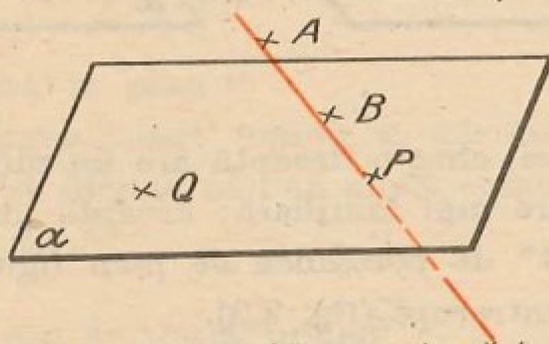


Fig. 1.13

8. Se dau dreptele paralele d şi g. Să se arate că toate dreptele care au un punct comun cu d şi unul cu g sînt conţinute în planul determinat de d şi g.

9. Dacă dreapta d_1 este coplanară cu d_2, şi d_2 este coplanară cu d_3, rezultă că d_1 şi d_3 sînt coplanare?

10. Dîndu-se două drepte concurente d şi g, să se găsească locul geometric al punctelor dreptelor care se sprijină pe d şi sînt paralele cu g (Prin „se sprijină" înţelegem că au un punct comun cu d).

* Vom nota cu* problemele a căror rezolvare implică, după părerea noastră, o ingeniozitate sporită. Este o indicaţie pentru predarea diferenţiată.

11. Se dă un punct fix A şi dreapta d. Să se găsească locul geometric al punctelor dreptelor care trec prin A şi printr-un punct mobil $B \in d$.

POZIŢIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FAŢĂ DE UN PLAN

1. *O dreaptă poate avea comun cu un plan două puncte.*

Ştim atunci că ea este în întregime conţinută în acest plan (P_4).

2. *O dreaptă poate avea un singur punct comun cu un plan.*

Priviţi, de exemplu, linia de intersecţie a doi pereţi şi planul podelei. Dar cum această observaţie nu este o demonstraţie, să dăm una:

Fie planul α, un punct $A \in \alpha$ şi un punct B nesituat în planul α ($B \notin \alpha$). Dreapta d, care trece prin A şi B, are *numai* punctul A comun cu α. Dacă ar mai avea încă un punct C în α, ar fi conţinută în întregime în α, ceea ce nu este adevărat: ($B \notin \alpha$) (fig. 2.1).

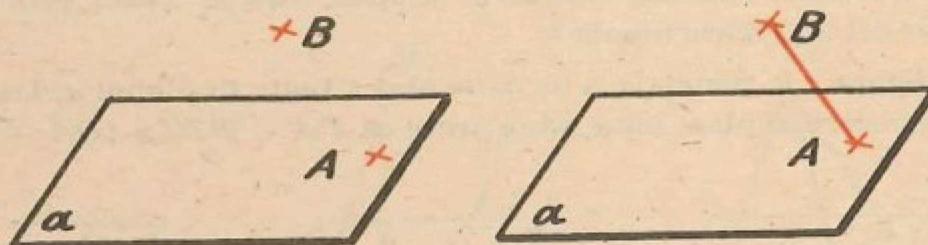


Fig. 2.1

Convenţie. De multe ori, cînd o dreaptă are un punct comun cu planul, vom utiliza şi o exprimare mai familiară: dreapta „înţeapă" planul. Vom desena segmentul „mascat" de porţiunea de plan figurată, punctat, în rest dreapta va fi desenată neîntrerupt (fig. 2.2).

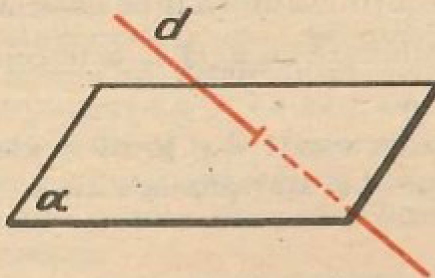


Fig. 2.2

3. *O dreaptă d poate să nu aibă nici un punct comun cu planul* ($d \cap \alpha = \emptyset$).

Vom spune, în acest caz, că dreapta este paralelă cu planul.

Să arătăm că există astfel de drepte. Fie un plan α, o dreaptă a situată în acest plan ($a \subset \alpha$) şi un punct A nesituat în planul α ($A \notin \alpha$) (fig. 2.3).

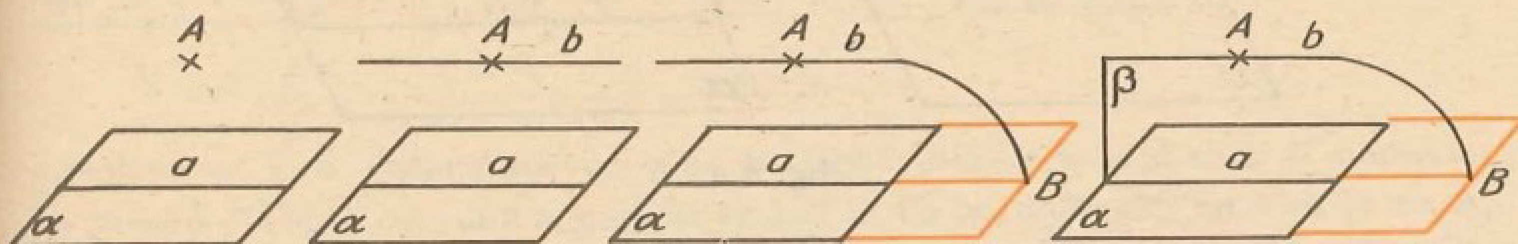


Fig. 2.3

Prin A ducem dreapta b paralelă cu a. Afirmăm că b este paralelă cu planul α. Procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că b înţeapă planul în punctul $B(b \cap \alpha = \{B\})$. Notăm planul determinat de dreptele paralele a şi b cu β. Planele α şi β au comună dreapta a. Dacă B nu s-ar afla pe a, ar însemna că β şi α ar coincide, pentru că au o dreaptă a şi un punct B exterior ei, comune. Deci B, aparţinînd intersecţiei celor două plane, se află pe a. Dar aceasta este imposibil, pentru că a şi b sînt paralele.

În fond, am demonstrat prin aceasta următoarea

Teoremă. *O dreaptă paralelă cu o dreaptă din plan este paralelă cu planul (sau conţinută în el).*

Rezumînd deci, o dreaptă poate avea, relativ la un plan, următoarele trei poziţii:

1) să fie conţinută în plan;

2) să aibă un singur punct comun cu planul;

3) să fie paralelă cu planul (nici un punct comun cu el).

POZIŢIILE RELATIVE A DOUĂ PLANE

Ştim din P_3 că dacă două plane au trei puncte necoliniare comune, ele coincid.

Există plane care au numai o dreaptă comună? Da, sîntem îndemnaţi să spunem, privind linia după care se întîlneşte un perete al clasei cu tavanul! Dar să şi demonstrăm. Să considerăm un plan α, o dreaptă $d \subset \alpha$ şi un punct $A \notin \alpha$. Dreapta d şi punctul A determină un plan β, care are comun cu planul α numai dreapta d. Într-adevăr, dacă β ar mai avea comun cu α încă un punct B, neaparţinînd lui d, ar coincide cu α, deci $A \in \alpha$, ceea ce este fals (fig. 2.4).

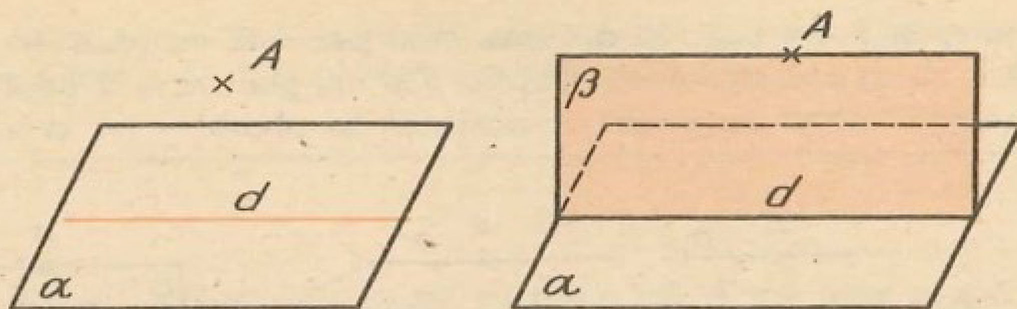


Fig. 2.4

Demonstrația precedentă ne-a arătat că există plane (cum sînt α și β), care au numai o dreaptă comună, altfel spus: se întîlnesc după o dreaptă.

Dar există oare plane care n-au nici un punct comun? Un exemplu ar fi podeaua și tavanul. Dar să dăm și o demonstrație.

Pentru aceasta să demonstrăm următoarea:

Lemă (teoremă ajutătoare). *Dacă două drepte paralele a și b sînt situate, respectiv, în două plane α și β care se intersectează după o dreaptă c, atunci c este paralelă și cu a și cu b.*

Există, într-adevăr, astfel de plane: luăm un punct C care nu-i nici pe a, nici pe b, el determină cu a și cu b respectiv planele căutate. Intersecția lor c trece prin C și afirmăm că este paralelă cu b. Dacă dreptele b și c n-ar fi paralele, fiind coplanare (situate în β), ar avea un punct comun D (fig. 2.5).

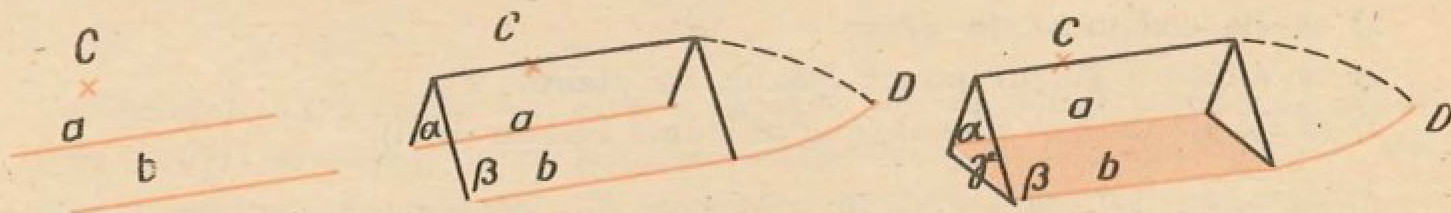


Fig. 2.5

Considerăm acum planul γ, determinat de dreptele paralele a și b. Punctul D ar aparține planului γ, deoarece aparține dreptei b, conținută în γ, ($D \in b \subset \subset \gamma \Rightarrow D \in \gamma$). Dar $D \in \alpha$ (pentru că $D \in c \subsetneq \alpha$). Deci, punctul D s-ar afla la intersecția planelor α și γ, deci pe dreapta a. Cu alte cuvinte, punctul D ar aparține atît dreptei a cît și dreptei b. Dar acest lucru este imposibil, pentru că a și b sînt paralele.

Putem acum demonstra că există plane paralele: Fie un plan α, două drepte a și b în planul α, concurente în P și un punct Q exterior planului. Prin Q ducem dreapta a', paralelă cu a, și dreapta b', paralelă cu b (fig. 2.6).

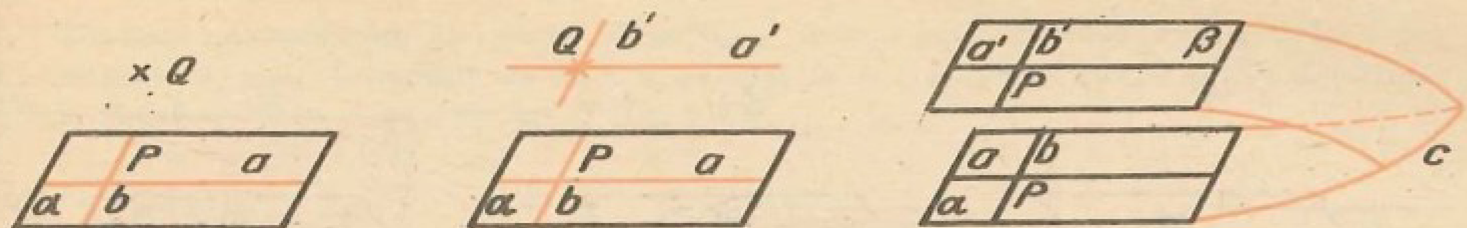


Fig. 2.6

Dreptele a' şi b' determină un plan β. Dacă planele α şi β n-ar fi paralele, ar avea o dreaptă comună c, care ar trebui să fie paralelă atît cu b cît şi cu a, ceea ce ar contrazice postulatul lui Euclid, a şi b fiind concurente în P.

Rezumînd: *Două plane distincte pot avea comună o dreaptă şi numai una, sau pot fi paralele (n-au nici un punct comun). Altă situaţie nu există!*

Din demonstraţia anterioară, rezultă şi următoarea teoremă, utilă la rezolvarea multor probleme: *Dacă un plan conţine două drepte concurente, paralele cu un alt plan, atunci primul plan este paralel cu cel de-al doilea.*

CÎTEVA TEOREME DE PARALELISM

Teorema 1. *Dacă o dreaptă (d) este paralelă cu un plan (α), oricare plan (β), care conţine această dreaptă şi intersectează planul iniţial, o face după o dreaptă (g) paralelă cu d.*

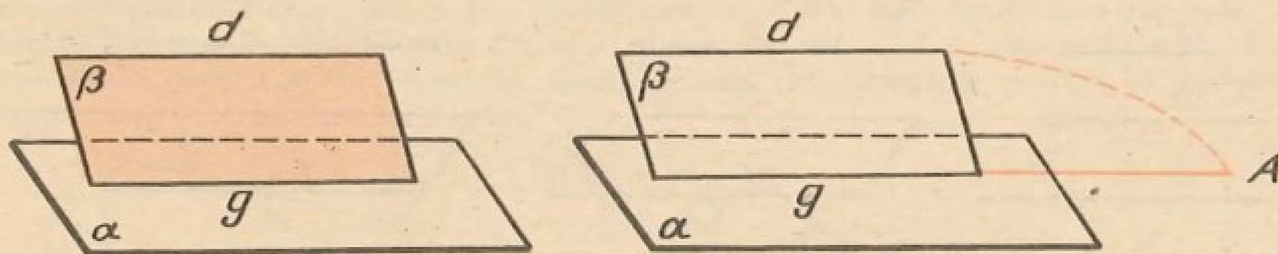


Fig. 2.7

Demonstraţie. Dreptele d şi g, fiind coplanare (fig. 2.7), sînt fie paralele, fie concurente. Dacă ar fi concurente (în A), ar rezulta că acest punct aparţine şi dreptei d şi planului α. Dar cum d şi α sînt paralele, rezultă că şi d şi g sînt paralele. Această teoremă poate fi considerată o reciprocă a celei de la pagina 11.

Teorema 2. *Dacă o dreaptă (d) este paralelă cu un plan (α) şi printr-un punct al planului (A ∈ α) ducem o paralelă (g) la dreapta iniţială (d), această a doua dreaptă este conţinută în plan.*

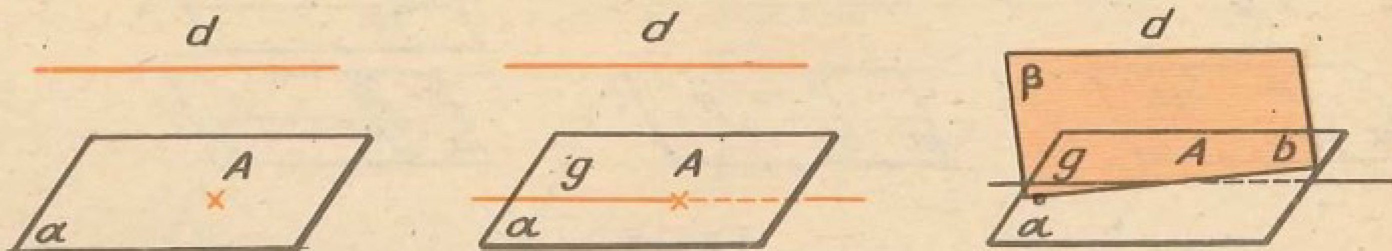


Fig. 2.8

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că g nu este conținută în α (fig. 2.8). Considerăm planul determinat de dreptele d și g, notat cu β. Planele α și β se taie după b. Deci, în planul β, prin punctul A trec dreptele g și b, ambele paralele cu d, ceea ce este imposibil.

Teorema 3. Tranzitivitatea relației de paralelism. *În spațiu, două drepte distincte, paralele cu o a treia, sînt paralele între ele.*

Demonstrație. Dacă dreptele sînt toate trei coplanare, este vorba de o consecință evidentă a axiomei paralelelor din geometria în plan. Dacă sînt numai două cîte două coplanare, presupunem că $a \parallel b$ și $b \parallel c$ și vom arăta că $a \parallel c$ (fig. 2.9). Considerăm planul β, determinat de b și c, și ducem, printr-un punct $A \in c$, o dreaptă $g \parallel a$. Conform teoremei precedente, $g \subset \beta$. Față de

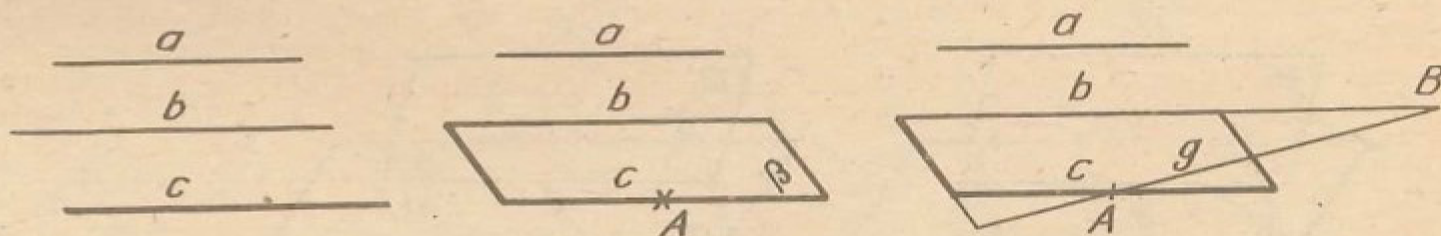


Fig. 2.9

dreapta b, dreapta g poate fi paralelă sau o poate întîlni într-un punct B. Dacă s-ar întîlni într-un punct B, ar rezulta că prin B se pot duce două paralele distincte, b și g, la a. S-ar contrazice astfel postulatul lui Euclid. Rezultă deci că dreapta g coincide cu c și deci tranzitivitatea este demonstrată.

Problemă rezolvată. Se dau trei drepte d_1, d_2 și d_3, astfel încît oricare pereche din ele să fie necoplanară, și nici toate trei să nu fie paralele cu un același plan. Să se arate că există o dreaptă g care se „sprijină" pe d_1 și pe d_2 și care este paralelă cu d_3. Să se arate că această dreaptă este unică.

Existența. Considerăm un punct A pe d_1 și ducem prin A dreapta d_3' paralelă cu d_3. Dreptele d_1 și d_3' determină un plan α, paralel cu d_3 (pentru că $d_3' \subset \alpha$ și $d_3' \parallel d_3$), care intersectează dreapta d_2 în punctul B (fig. 2.10).

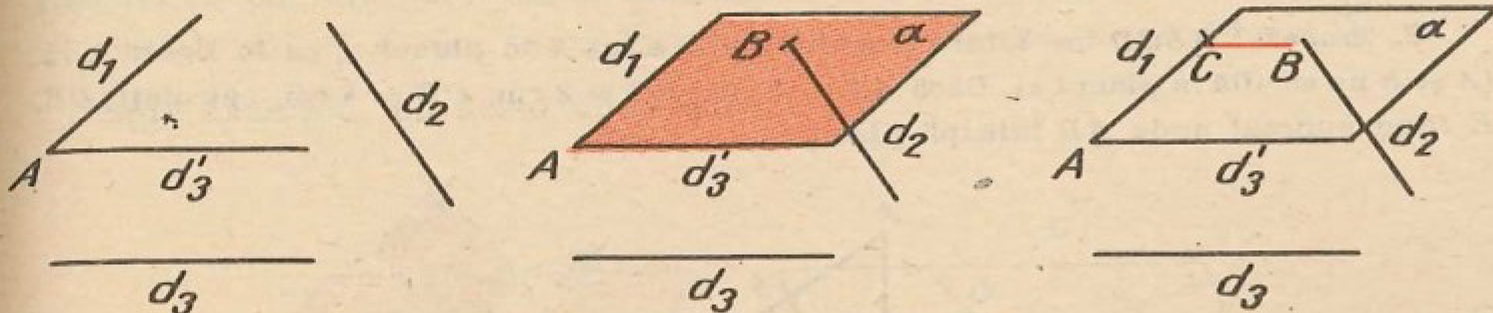


Fig. 2.10

Ducem prin punctul B dreapta BC paralelă cu d_3 ($C \in d_1$); dreapta BC este chiar dreapta g căutată.

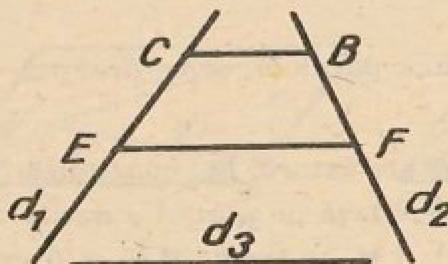
Vom da, ca să puteți spune unde este greșeala, o

Falsă demonstrație de unicitate. Deși punctul A este arbitrar ales pe d_1, planul α paralel cu d_3 este unic. Acest plan este intersectat de dreapta d_2 într-un punct B, evident unic. Din postulatul lui Euclid. paralela BC la d_3', deci la d_3, este evident unică. Deci dreapta g este unică.

Chiar dacă este adevărat că dreapta g este unică, demonstrația de mai sus trebuie s-o considerăm totuși eronată. Greșeala constă în faptul că metoda de construcție folosită la demonstrarea existenței nu este singura metodă posibilă și astfel, demonstrația unicității a devenit dependentă de construcția aleasă.

Unicitatea. Considerăm că, „sprijinindu-se" pe d_1 și d_2, există două drepte CB și EF, amîndouă paralele cu d_3 (fig. 2.11). Aceste drepte, CB și EF, vor fi deci paralele între ele, și deci coplanare. Deci și dreapta $CE = d_1$ și dreapta $BF = d_2$ se găsesc într-un același plan determinat de CB și EF. Această concluzie însă este absurdă, pentru că în ipoteză am precizat că d_1 și d_2 nu sînt coplanare.

Fig. 2.11



Aceasta este o demonstrație de unicitate corectă, pentru că face abstracție de modul cum s-a demonstrat existența. Ne-am oprit mai mult la comentarea acestei probleme pentru a pune în evidență un tip de eroare de raționament, destul de des întîlnit, dar care trebuie evitat cu multă grijă.

Atenție! La o demonstrație de unicitate, evitați să folosiți demonstrația de existență.

1. Două dreptunghiuri $ABCD$ şi $MNCD$ au o latură comună CD şi sînt situate în plane diferite. Demonstraţi că AB şi MN sînt paralele.

2. Trapezul $ABCD$ are latura neparalelă CD situată în planul α, ca în figura 2.12. (A şi B nu se află în planul α). Dacă $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 4$ cm, calculaţi DE, E fiind punctul unde AB înţeapă planul α.

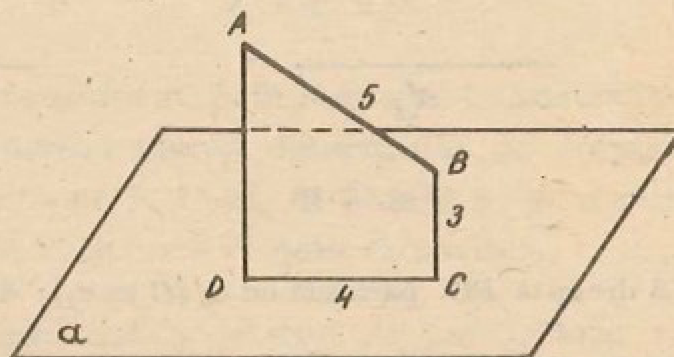


Fig. 2.12

3. Dacă dreptele $a \parallel b \not\parallel c$, rezultă că sînt toate coplanare?

4. Se dau două plane α şi β şi două drepte $a \subset \alpha$ şi $b \subset \beta$. Dacă $a \parallel \beta$ şi $b \parallel \alpha$ şi a nu este paralelă cu b, să se demonstreze că planele α şi β sînt paralele.

5. Fiind date patru puncte necoplanare, după cîte drepte se intersectează planele determinate de cîte trei din aceste puncte?

6. Dîndu-se două plane paralele, arătaţi că orice dreaptă din primul plan este paralelă cu al doilea.

7. *Formulaţi o reciprocă a propoziţiei din problema 6 şi verificaţi dacă aceasta este sau nu adevărată.

8. Este oare suficient ca două plane să fie paralele cu aceeaşi dreaptă, ca să fie paralele între ele?

9. Dîndu-se două plane paralele, orice dreaptă din primul plan este paralelă cu orice dreaptă din al doilea?

10. Un triunghi ABC are latura BC conţinută în planul α, iar $M \in AB$ şi $N \in AC$. Stabiliţi poziţia dreptei MN faţă de planul α dacă: a) $AM = 5$ cm, $AN = 10$ cm, $MB = 3$ cm, $NC = 6$ cm; b) $AM = 1$ cm, $AN = 3$ cm, $MB = 1$ cm, $NC = 5$ cm.

11. Dacă un plan este paralel cu două laturi ale unui triunghi, demonstraţi că este paralel cu a treia latură a triunghiului.

12. Un trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) are latura AB conţinută într-un plan α. Un plan ce conţine dreapta CD intersectează planul α după o dreaptă g. Stabiliţi poziţia dreptelor AB şi g.

POZIȚIILE RELATIVE A TREI PLANE

Știm în ce poziții relative se pot afla două plane. Să vedem în ce situații relative se pot afla trei plane, diferite două cîte două.

Există trei plane care au o dreaptă comună și numai una (fig. 3.1).

Spre exemplu, un dosar cu o filă.

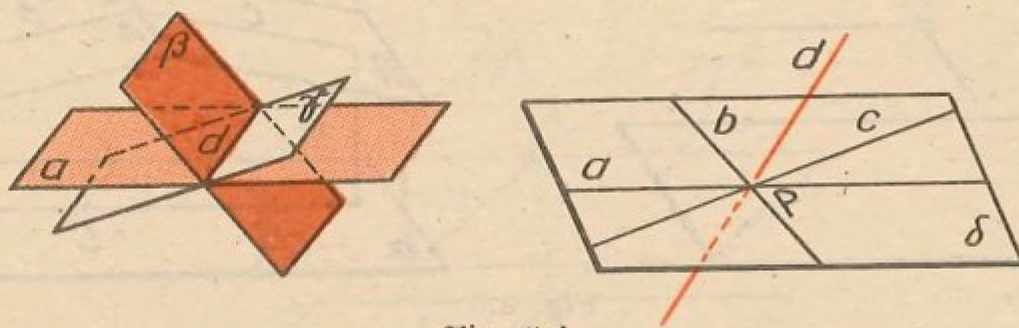


Fig. 3.1

Într-adevăr, considerăm dreapta d și un plan δ care intersectează dreapta d în punctul P. Prin P ducem, în planul δ, trei drepte a, b, c, distincte. Dreptele a și d determină planul α, b și d planul β, c și d planul γ. Aceste plane sînt distincte: dacă ar fi confundate, ar coincide cu δ, dar dreapta lor comună d nu este conținută în δ.

Există trei plane care au un punct comun și numai unul.

Într-adevăr, în planul α desenăm dreptele b și c, care trec prin punctul P. Fie A un punct exterior planului α (fig. 3.2). Notăm dreapta AP cu a și planele determinate de a, b cu γ și a, c cu β. Planele α, β, γ au toate trei

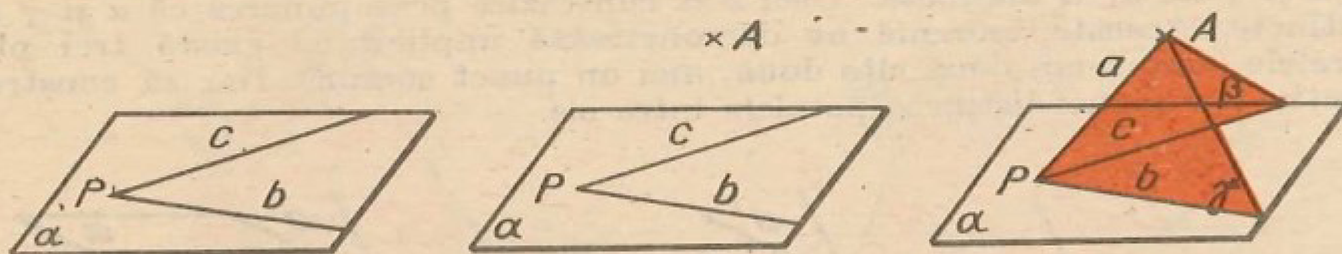


Fig. 3.2

un punct comun și numai unul (P). Dacă ar mai avea unul, s-ar ajunge la concluzia că a, b, c coincid, ceea ce este imposibil pentru că A nu este conținut în planul α.

Mai departe vom vedea că *există și trei plane care nu au, două cîte două, nici un punct comun (trei plane paralele)*. Pentru aceasta va trebui să demonstrăm cîteva teoreme ajutătoare.

Teoremă. *Printr-un punct (A), exterior unui plan (α), trece un singur plan paralel cu el.*

Existența. Prin punctul dat se duc două drepte distincte paralele cu planul, iar planul determinat de aceste drepte este cel căutat.

Unicitatea. Să presupunem că prin A trec două plane distincte (β și γ) paralele cu α (fig. 3.3). Ele, avînd un punct comun (A), au o dreaptă comună. Fie d această dreaptă ($d \parallel \alpha$). În planul α, considerăm două puncte, B și C,

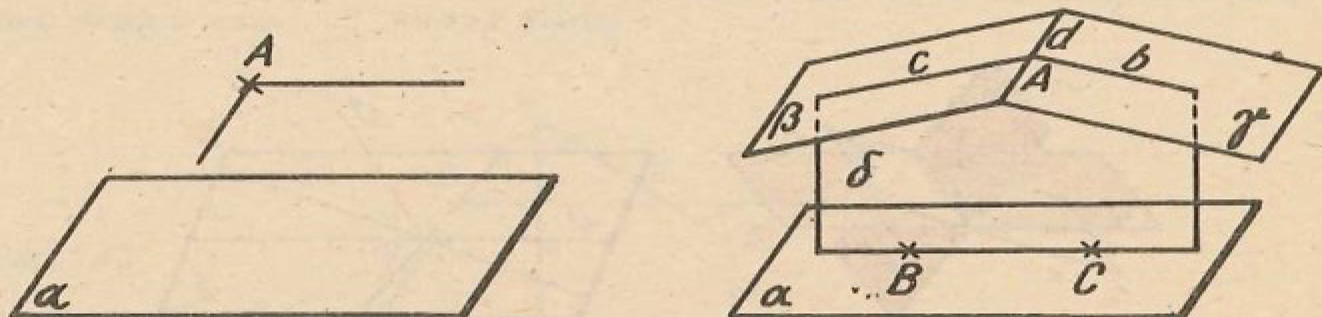


Fig. 3.3

astfel încît dreapta lor să nu fie paralelă cu d (alegerea acestor puncte este simplă: ducem prin B o dreaptă $d' \parallel d$ și punctul C îl luăm nesituat pe d'). Punctele A, B, C determină un plan δ, care taie planele β și γ după dreptele c și b ($c \parallel BC$ și $b \parallel BC$). Există două posibilități: dreptele c și b sau să fie în prelungire, sau diferite. Dacă ar fi în prelungire, atunci ar aparține ambelor plane (β și γ) și deci s-ar confunda cu d, ceea ce este imposibil întrucît, prin construcție, d nu este paralelă cu BC. Dacă b și c ar fi diferite, ele trebuind să fie paralele cu BC, s-ar contrazice postulatul lui Euclid. Unicitatea este deci demonstrată.

Teoremă. *Două plane (distincte), paralele cu un al treilea plan (distinct de ele), sînt paralele între ele.*

Fie $\alpha \parallel \beta$ și $\beta \parallel \gamma$. Dacă α și γ n-ar fi paralele, ar însemna că au cel puțin un punct B comun. Or, prin B trece un singur plan paralel cu β, ar însemna că α și γ nu ar fi distincte. Deci s-ar contrazice presupunerea că α și γ sînt distincte. Această teoremă ne demonstrează implicit că există trei plane paralele (care n-au, două cîte două, nici un punct comun). Dar să construim efectiv trei plane distincte paralele între ele.

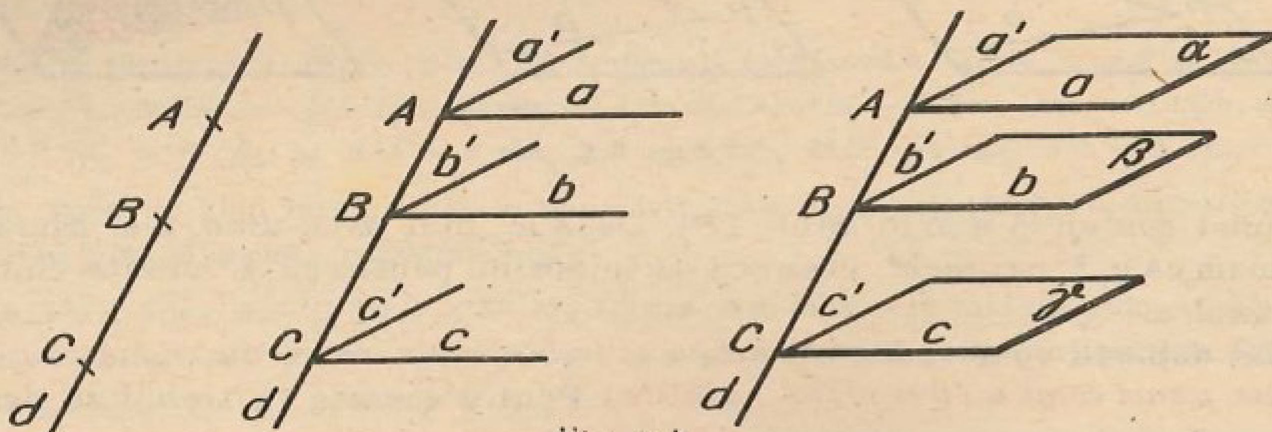


Fig. 3.4

Iată cum: pe dreapta d considerăm punctele distincte A, B și C (fig. 3.4). Ducem prin ele respectiv dreptele $a \parallel b \parallel c$ și $a' \parallel b' \parallel c'$ (a și a' diferite). Planele α, β, γ determinate de a, a' de b, b' și de c, c' sînt paralele și distincte.

Mai dăm următoarea teoremă utilă în demonstrații:

Teoremă. *Dacă două plane sînt paralele, orice plan care intersectează pe primul, îl intersectează și pe al doilea, iar dreptele de intersecție sînt paralele.*

Demonstrație. Cu notațiile din figura 3.5, presupunem că $\alpha \parallel \beta$ și că γ taie pe α după dreapta a. Dacă γ nu ar tăia și pe β, ar însemna că printr-un punct $A \in a$, s-ar putea duce două plane (α și γ) paralele la β, ceea ce este

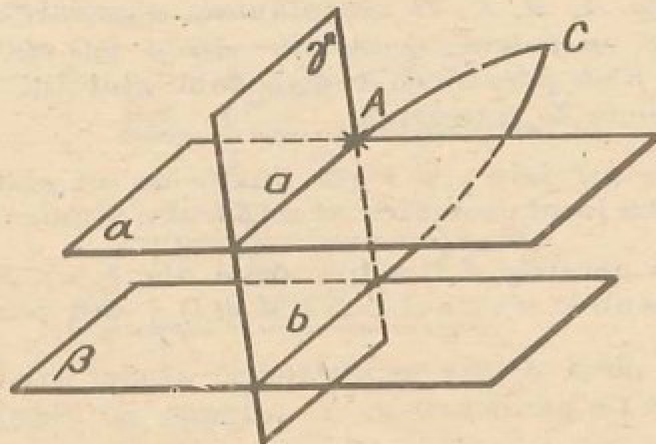


Fig. 3.5

absurd. Deci $\gamma \cap \beta = b$. Mai departe, dreptele a și b sînt coplanare. Dacă n-ar fi paralele, ar însemna că ar avea un punct comun C. Or C, aparținînd dreptelor a și b, ar aparține și planelor α și în β, în care aceste drepte sînt respectiv conținute. Ar însemna că α și β nu ar fi paralele. Ceea ce este absurd!

Teoremă. *Dacă trei plane α, β, γ nu au toate trei nici un punct comun și se taie două cîte două, atunci cele trei drepte de intersecție sînt paralele.*

Înainte de a face însă demonstrația, ar trebui să ne asigurăm că astfel de plane există; acest fapt rezultă din teorema de la pagina 17.

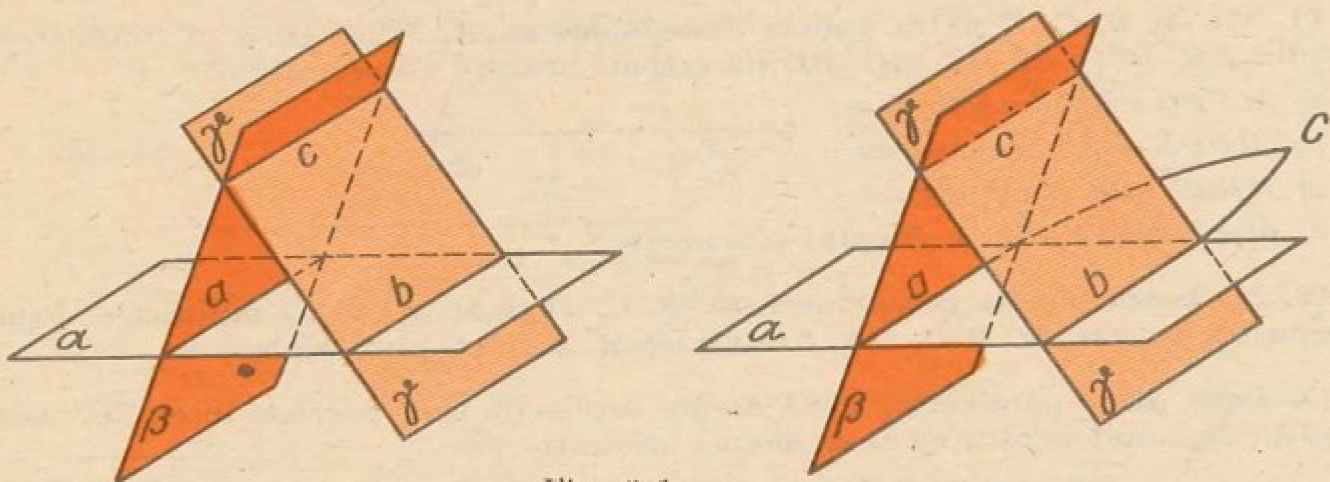


Fig. 3.6

Demonstrație. Cu notațiile din figura 3.6, dacă de pildă a și b n-ar fi paralele, ar trebui să se întîlnească într-un punct C, care ar aparține deci tuturor celor trei plane α, β și γ, ceea ce contrazice ipoteza.

1. Două drepte paralele cu același plan sînt neapărat paralele între ele?

2. Se dau două drepte necoplanare a și b și un punct C. Să se ducă prin C o dreaptă coplanară atît cu a cît și cu b.

3. Dacă dreptele d și g sînt paralele și g este paralelă cu planul α, atunci și dreapta d este paralelă cu planul α (sau conținută în el).

4. Dîndu-se punctele A, B, C, D necoplanare, segmentele AB, BC, CD, DA alcătuiesc ceea ce se cheamă un patrulater strîmb; AC și BD sînt diagonalele lui. Intersectînd laturile sale cu un plan paralel cu o diagonală, stabiliți natura poligonului convex cu vîrfurile în aceste puncte de intersecție.

5. Dacă două drepte paralele a și b sînt tăiate de un plan variabil, în punctele A, respectiv B, să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului AB.

6. Prin două drepte paralele d și g trec două plane α și β tăiate de un al treilea plan γ. În ce condiții dreptele $a = \alpha \cap \gamma$ și $b = \beta \cap \gamma$ sînt paralele?

7. Dacă d și g sînt două drepte necoplanare, atunci există un plan și numai unul care să conțină pe d și să fie paralel cu g.

8. Știm că un plan taie două plane paralele după două drepte paralele. Formulați o reciprocă și cercetați dacă este adevărată.

9. Două triunghiuri ABC și ACD au laturile AB și AD conținute într-un plan α. Fie $M \in AC$, astfel ca $AM \equiv MC$. Paralela prin M la AB intersectează dreapta BC în punctul N. Paralela prin M la AD intersectează dreapta CD în punctul P. Stabiliți poziția planelor (ABD) și (MNP).

10. Se dau trei plane paralele α, β, γ și punctele A, B în planul α, iar C, D în planul β. Dreptele AC, BC, BD, AD taie planul γ în punctele E, F, G, H. Să se arate că figura $EFGH$ este un paralelogram.

11. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și M, N, P, Q, R, S, mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA, AC, BD (în această ordine). Să se arate că:

a) $MNPQ$ este paralelogram;

b) $MRPS$ este paralelogram;

c) $NRQS$ este paralelogram;

d) dreptele MP, NQ și RS sînt concurente.

12. Fie patru puncte necoplanare A, B, C, D și M, N, P, Q mijloacele respective ale segmentelor AB, BC, CD, DA. Arătați că M, N, P, Q sînt coplanare.

13. Două plane paralele cu două drepte coplanare sînt paralele între ele? Adăugați o condiție în enunț pentru ca el să devină afirmativ.

14. Se dau dreptele a paralelă cu b și c neparalelă cu ele și necoplanară cu nici una din ele. Punctul A parcurge dreapta c. Planele determinate de a și A și de b și A se taie după o dreaptă d. Aflați locul geometric al punctelor dreptei d.

ALTE TEOREME DE PARALELISM

1. Segmente paralele între plane paralele*. *Două plane paralele determină pe două drepte paralele, pe care le intersectează, segmente congruente.*

Demonstrație. Planele paralele sînt α și β, dreptele paralele sînt d și g (fig. 4.1). Planul (d, g) intersectează pe α și pe β după două drepte paralele (AB și DC). Rezultă că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, deci $BC \equiv AD$.

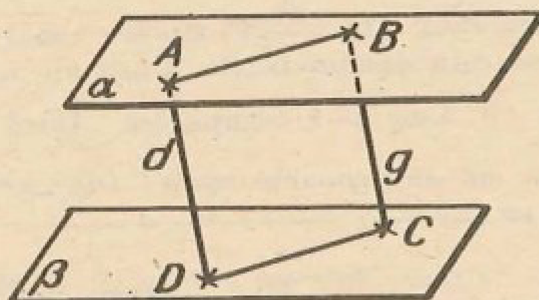
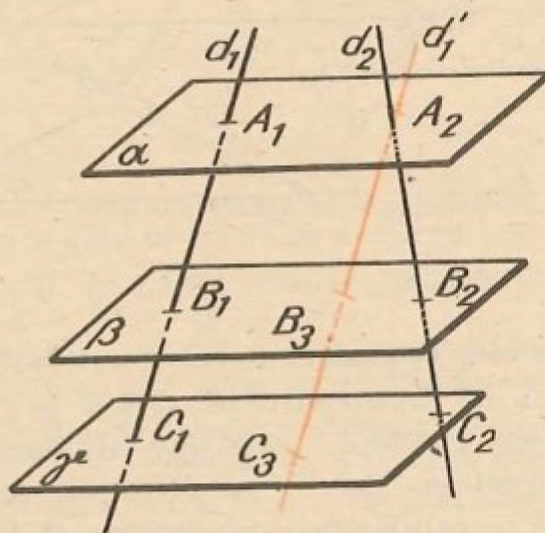


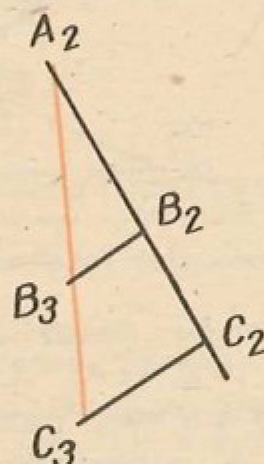
Fig. 4.1

2. Teorema lui Thales în spațiu. *Mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, care le intersectează pe acestea, segmente respectiv proporționale.*

Demonstrație. Fie α, β și γ trei plane paralele, distincte două cîte două, și fie d_1 și d_2 două drepte distincte, care taie cele trei plane în punctele A_1 B_1, C_1 respectiv A_2, B_2, C_2 (fig. 4.2).

Fig. 4.2





* Folosim această denumire, deși improprie, pentru că este intrată în uz. Este improprie pentru că s-ar putea ivi cazul din figura 4.3.

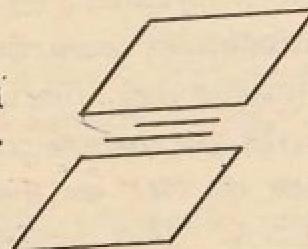


Fig. 4.3

Ducem prin A_2 o paralelă d_1' la dreapta d_1 și fie B_3 și C_3 intersecțiile dreptei d_1' cu planele β și γ.

Astfel, în triunghiul $A_2C_2C_3$, segmentul B_2B_3 este paralel cu C_2C_3 și putem scrie deci:

$$\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{A_2B_3}{B_3C_3}. \quad \text{Rezultă: } \frac{A_2B_2}{A_2B_3} = \frac{B_2C_2}{B_3C_3}.$$

Însă $A_2B_3 \equiv A_1B_1$ și $B_3C_3 \equiv B_1C_1$. Rezultă că $\dfrac{A_2B_2}{A_1B_1} = \dfrac{B_2C_2}{B_1C_1}$.

Observație. În enunțul teoremei am vorbit despre „mai multe plane paralele" și nu despre trei plane așa cum apare în demonstrație. Dacă am avea doar două plane, atunci raportul $\dfrac{A_2B_2}{A_1B_1}$ nu am avea cu cine să-l comparăm. Dacă am avea mai mult decît trei plane paralele, am obține un șir de rapoarte egale (numărul de rapoarte fiind egal cu numărul planelor micșorat cu 1).

3. Unghiuri cu laturile paralele. Fie $\sphericalangle xOy$ și $\sphericalangle x'O'y'$ două unghiuri necoplanare, cu laturile respectiv paralele $Ox \parallel O'x'$ și $Oy \parallel O'y'$ și astfel încît Ox, $O'x'$ să fie în același semiplan determinat de dreapta OO', la fel și Oy cu $O'y'$. Să demonstrăm că $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$ (fig. 4.4).

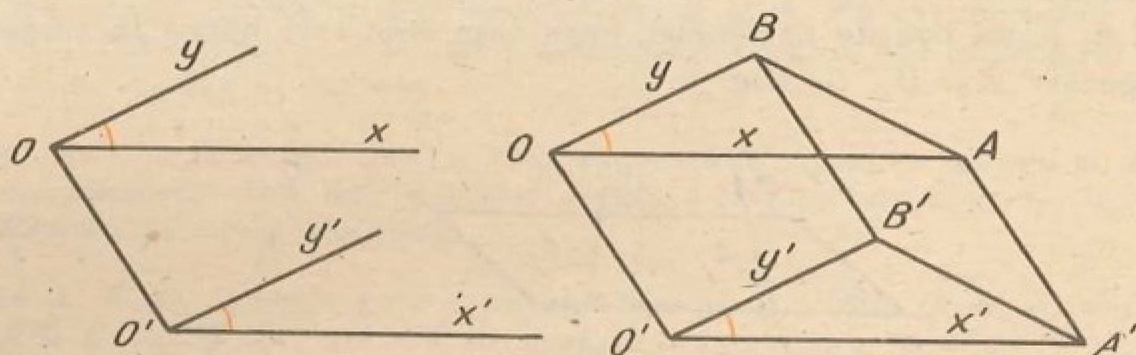


Fig. 4.4

Vom lua pe laturile paralele segmentele $OA \equiv O'A'$, $(OA = a)$ și $OB \equiv O'B'$, $(OB = b)$. Afirmăm că triunghiurile OAB și $O'A'B'$ sînt congruente. Într-adevăr, patrulaterul $AOO'A'$ este paralelogram, avînd laturile OA și $O'A'$ congruente și paralele. La fel și $BOO'B'$ este paralelogram. De aici rezultă că și $ABB'A'$ este paralelogram, avînd două laturi AA' și BB' paralele și congruente. Rezultă că $\Delta OAB \equiv \Delta O'A'B'$ (avînd laturile respectiv congruente), deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$ și propoziția este demonstrată.

Dacă numai o pereche dintre laturile paralele se află în semiplane diferite față de OO' se demonstrează ușor că unghiurile sînt suplementare (fig. 4.5). Putem deci afirma:

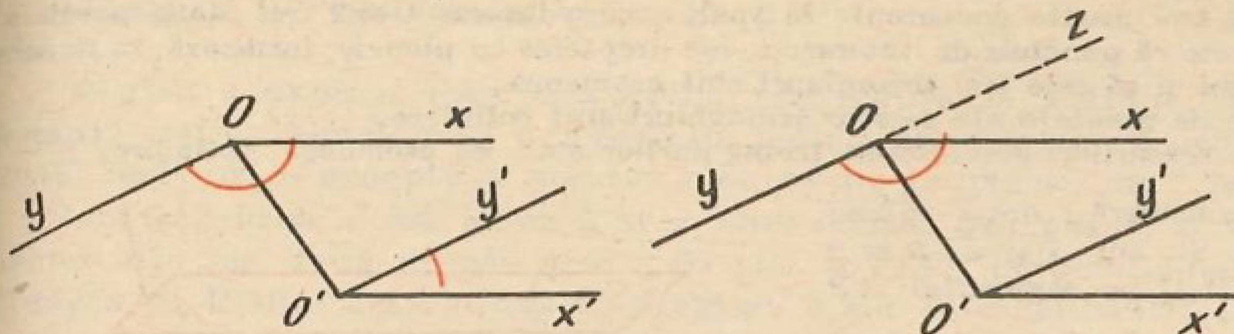


Fig. 4.5

Teoremă. *Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt congruente sau suplementare.*

PROBLEME 4

---

1. În figura 4.6, planele α, β, γ sînt paralele şi $A'C'$, AC sînt două secante. Ştiind că $A'B' = 5$ cm, $B'C' = 3$ cm şi $AC = 12$ cm, calculaţi AB şi BC.

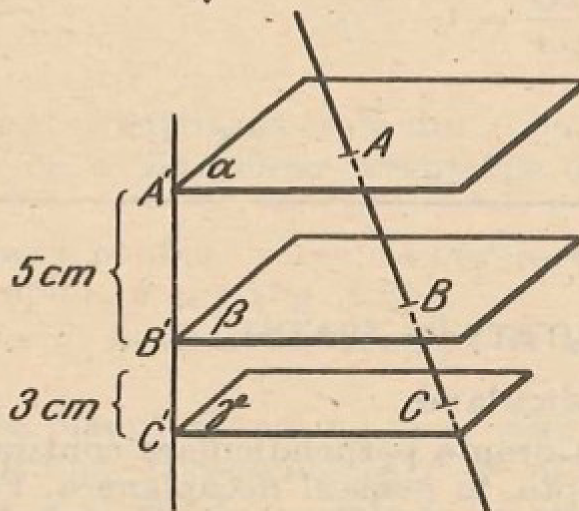


Fig. 4.6

2. Se dă o dreaptă d şi un punct A, exterior ei. Se consideră mulţimea planelor care trec prin A şi sînt paralele cu d. Să se arate că aceste plane au o dreaptă comună.

3. Fie planul α şi un punct exterior lui, A. Care este locul geometric al mijlocului segmentului AB, cînd B parcurge α?

4. Fie planul α şi dreapta $d \parallel \alpha$. Dacă A parcurge d şi B este punctul curent (poate ocupa orice poziţie) în α, care este locul geometric al mijlocului segmentului AB?

5. Se dau două drepte neconcurente în spaţiu, d şi g. Care este locul geometric al mijlocului segmentului DG unde $D \in d$, $G \in g$, cînd: a) $d \parallel g$; b) d şi g sînt necoplanare.

6. Aceeaşi problemă, dacă în loc de dreptele d şi g se dau segmentele AB şi PQ: a) $AB \parallel PQ$; b) AB necoplanar cu PQ.

7. Demonstraţi că dacă patru drepte paralele determină, pe un plan dat, vîrfurile unui paralelogram, atunci determină pe orice plan care le taie vîrfurile unui paralelogram.

8. Arătaţi că dacă două drepte concurente se intersectează cu două plane paralele în punctele A, B şi respectiv C, D, astfel încît patrulaterul $ABCD$ să fie inscriptibil, atunci acesta este fie dreptunghi, fie trapez isoscel.

9. Dacă două plane paralele determină pe două secante segmente congruente, aceste secante sînt paralele? Justificaţi răspunsul dat.

10. Se dau trei drepte concurente în spaţiu, care intersectează trei plane paralele.

a) Să se arate că punctele de intersecţie ale dreptelor cu planele, formează, în fiecare plan, un triunghi şi că cele trei triunghiuri sînt asemenea.

b) Centrele de greutate ale acestor triunghiuri sînt coliniare.

c) Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor sînt, de asemenea, coliniare.

11. Se consideră două plane paralele α şi β. Se iau $A \in \alpha$, $B \in \beta$ şi apoi un punct C pe segmentul AB aşa încît $\frac{AC}{CB} = 3$. Ce figură descrie C cînd A şi B parcurg α şi respectiv β?

12*. Linia frîntă închisă $ABCD$ este tăiată de planul θ în punctele M, N, P, Q ($M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$, $Q \in DA$). Ducînd prin A, B, C, D respectiv planele α, β, γ, δ paralele cu θ şi apoi o dreaptă d, care taie aceste plane în A', B', C', D', să se dovedească relaţia

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$$

(Vezi figura 4.7).

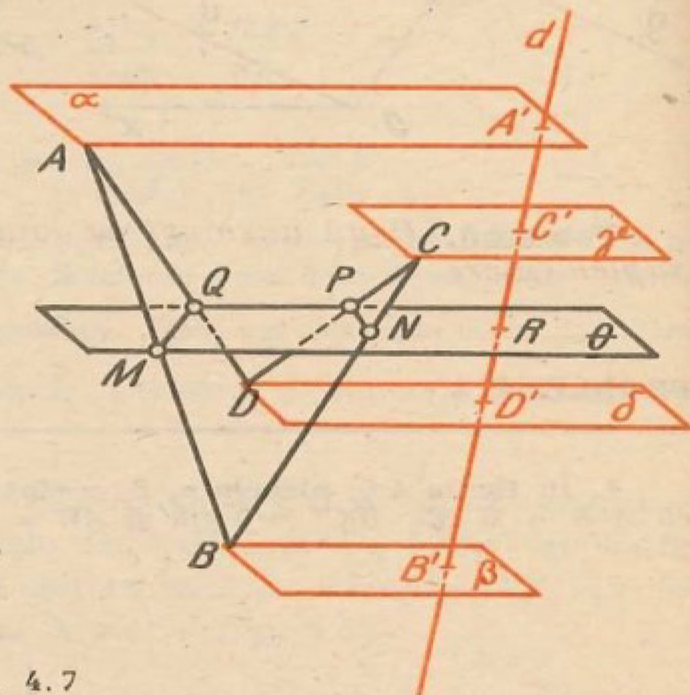


Fig. 4.7

PERPENDICULARITATE ÎN SPAŢIU

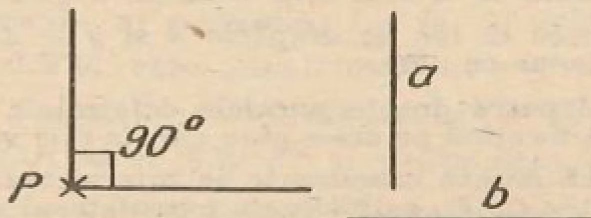
Drepte perpendiculare

Ştim ce înseamnă drepte perpendiculare conţinute în acelaşi plan.

Fie a, b două drepte, în general necoplanare. Fie P un punct oarecare în spaţiu. Să ducem prin P dreptele a' şi b', paralele respectiv cu a şi b. Dacă P' este un alt punct în spaţiu, să ducem şi prin el dreptele $a'' \parallel a$, $b'' \parallel b$. Avem $a'' \parallel a'$ şi $b'' \parallel b'$; teorema asupra unghiurilor cu laturi paralele arată că $a' \perp b'$, dacă şi numai dacă, $a'' \perp b''$. Ajungem la:

Definiţie. *Două drepte a şi b în spaţiu se numesc perpendiculare dacă paralelele duse printr-un punct P la ele sînt perpendiculare.* Scriem $a \perp b$ (fig. 5.1).

Fig. 5.1.



Am văzut mai sus că dacă aceasta se întîmplă relativ la un punct P, atunci acelaşi lucru este valabil relativ la orice punct din spaţiu.

Dreapta perpendiculară pe un plan

Pentru a explica această noțiune vom căuta să arătăm că, dîndu-se o dreaptă a și un punct $A \in a$, există un plan α care să treacă prin punctul A, astfel încît orice dreaptă a acestui plan să fie perpendiculară pe dreapta a.

Vom considera două plane β și γ, care conțin dreapta a, și vom duce în fiecare din ele două drepte b ($b \subset \beta$) și c ($c \subset \gamma$), perpendiculare în A pe dreapta a. Planul determinat de dreptele b și c este cel căutat (fig. 5.2).

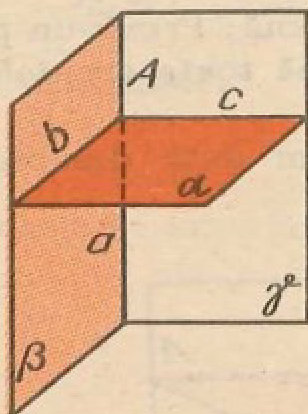


Fig. 5.2

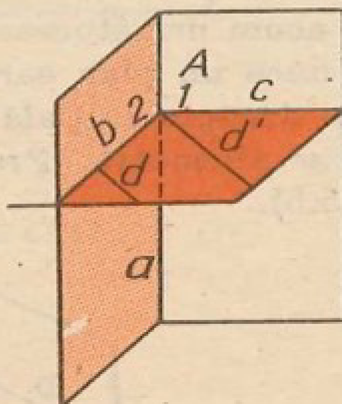


Fig. 5.3

Vom demonstra acest fapt. Pentru dreptele din α paralele cu b sau cu c, este evident, unghiurile lor cu a fiind chiar unghiurile drepte A_1 sau A_2 din figura 5.3.

Să demonstrăm acest lucru pentru o dreaptă oarecare $d \subset \alpha$, care nu este paralelă cu nici una din dreptele b și c (fig. 5.3).

Ducem prin A o paralelă d' la această dreaptă. Se arată ușor că ea este conținută în planul α.

Alegem o altă dreaptă în planul α, care nu trece prin A și care taie dreptele b, c, d' în B, C, F. Putem presupune că F se află între B și C.

Luăm pe a două puncte E și E', de o parte și de alta a lui A, așa încît $AE \equiv AE'$.

Avem $EB \equiv E'B$, $EC \equiv E'C$, din perechile de triunghiuri dreptunghice congruente EAB, $E'AB$ și EAC, $E'AC$ (fig. 5.4).

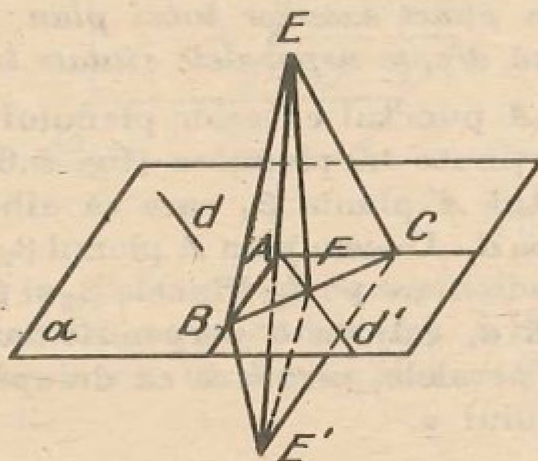


Fig. 5.4

Deci triunghiurile EBC, $E'BC$ sînt congruente (au toate laturile respectiv congruente) şi deducem $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle E'BC$.

Aceasta permite să afirmăm că triunghiurile EBF şi $E'BF$ sînt congruente (au două laturi şi unghiul cuprins între ele respectiv congruente). Rezultă $EF \equiv E'F$, adică triunghiul EFE' este isoscel; în el, mediana FA va fi înălţime, ceea ce reprezintă concluzia dorită: $d' \perp a$, adică $d \perp a$.

Printr-un punct A al unei drepte a trece deci un plan astfel încît orice dreaptă conţinută în acest plan să fie perpendiculară pe dreapta a.

Ne propunem acum următoarea problemă: Printr-un punct exterior unei drepte, se poate duce un plan care să aibă toate dreptele, conţinute în el, perpendiculare pe dreapta iniţială?

Răspunsul este afirmativ. Presupunem dată dreapta a şi punctul A exterior ei (fig. 5.5).

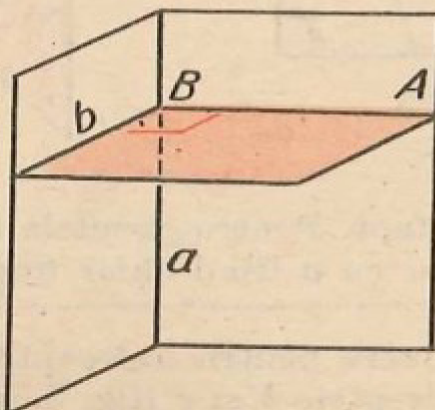


Fig. 5.5.

În planul determinat de dreapta a şi de punctul A, ducem dreapta AB perpendiculară pe dreapta a ($B \in a$). Într-un plan care conţine pe a, dar este diferit de planul (a, A), ridicăm din B o perpendiculară b pe a. Dreptele AB şi b determină un plan care îndeplineşte, conform celor arătate mai sus, condiţiile cerute, trecînd prin $B \in a$ şi conţinînd două drepte neparalele perpendiculare pe a.

Vom demonstra acum următoarea

Teoremă. *Dintr-un punct exterior unui plan, se poate construi o dreaptă perpendiculară pe două drepte neparalele situate în planul dat.*

Demonstraţie. Fie A punctul exterior planului α dat şi fie d_1 şi d_2 două drepte neparalele conţinute în planul α (fig. 5.6).

Ducem prin punctul A planul β_1 care să aibă toate dreptele, conţinute în el, perpendiculare pe d_1. Ducem prin A planul β_2 care să aibă toate dreptele, conţinute în el, perpendiculare pe d_2. Planele β_1 şi β_2, avînd un punct comun A, au o dreaptă comună a, care este perpendiculară, deci, şi pe d_1 şi pe d_2. Cum d_1 şi d_2 nu sînt paralele, urmează că dreapta a este perpendiculară pe orice dreaptă a planului α.

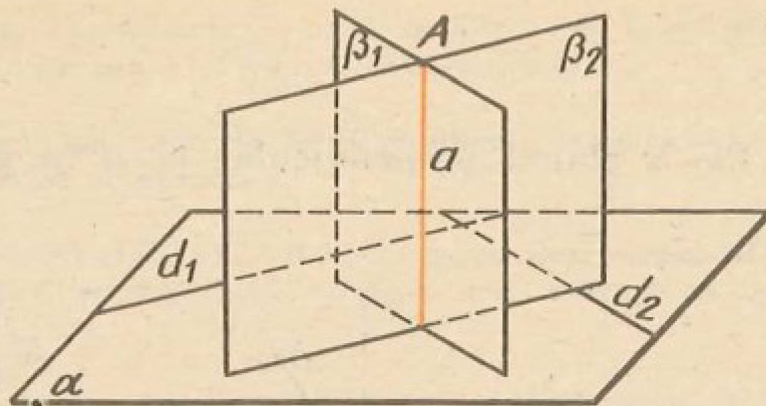


Fig. 5.6.

Putem da deci următoarea:

Definiție. *Numim dreaptă perpendiculară pe un plan o dreaptă perpendiculară pe două drepte neparalele conținute în acel plan.*

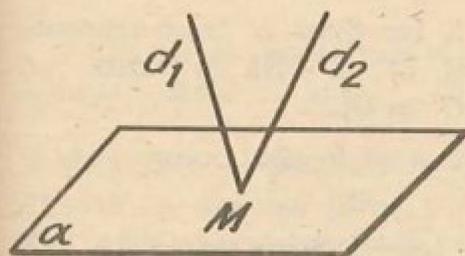
Din cele demonstrate anterior rezultă că:

O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă a planului.

Teoremă. *Dintr-un punct M se poate duce, pe un plan α, o perpendiculară și numai una.*

Demonstrație. Cazul 1. Punctul M aparține planului α. Să presupunem, prin absurd, că prin punctul M am putea duce două perpendiculare d_1 și d_2 pe planul α. Dreptele d_1 și d_2 determină un plan β. Fie a dreapta de intersecție a planelor α și β. Dreptele d_1 și d_2, presupuse perpendiculare pe planul α, vor fi, deci, perpendiculare și pe dreapta $a \subset \alpha$ (fig. 5.7).

Problema devine o problemă de geometrie în plan: În planul β, în punctul M, s-ar putea duce două perpendiculare în acest punct pe dreapta a. Or acest lucru este imposibil. Deci relația $d_1 \neq d_2$ este absurdă. Rezultă că prin punctul M, al planului α, se poate duce pe acesta o perpendiculară și numai una.



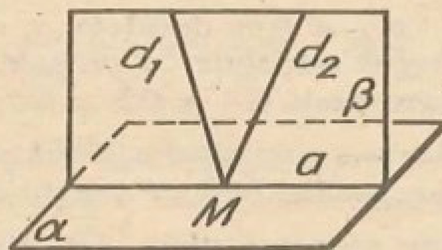


Fig. 5.7

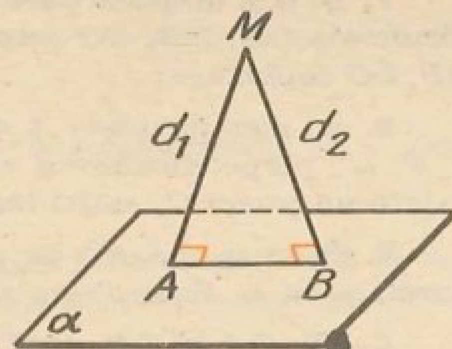


Fig. 5.8

Cazul 2. Punctul $M \notin \alpha$. Presupunem că putem duce prin punctul M dreptele d_1 și d_2 perpendiculare pe planul α (fig. 5.8). Fie A și B picioarele acestor perpendiculare. Ar urma că triunghiul AMB are două unghiuri drepte, ceea ce este absurd.

Teoremă. *Locul geometric al punctelor dreptelor care trec printr-un punct A al unei drepte d şi sînt perpendiculare pe aceasta, este planul perpendicular pe această dreaptă şi care trece prin acest punct.*

Demonstraţie. Fie α planul perpendicular pe d în punctul A (fig. 5.9).

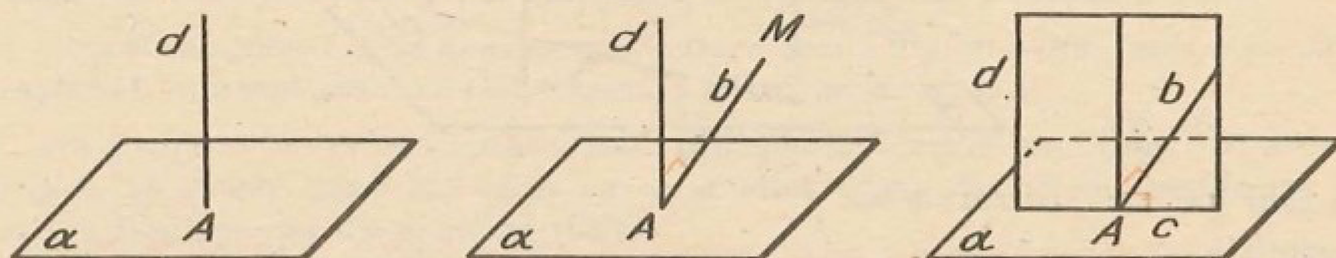


Fig. 5.9

Orice dreaptă din α este perpendiculară pe d. În particular, toate cele care trec prin A şi sînt conţinute în α.

Presupunem că există un punct $M \notin \alpha$, astfel încît dreapta $MA = b$ şi $b \perp d$, deci, că există o dreaptă b ($b \perp d$ şi $b \not\subset \alpha$) şi $A \in b$.

Fie planul (d, b), care taie α după dreapta c. Pentru că $d \perp \alpha$ şi $c \subset \alpha$, rezultă că $d \perp c$. Deci, în planul (d, b), ar rezulta că se pot duce două drepte b şi c perpendiculare într-un punct A pe aceeaşi dreaptă d, ceea ce este imposibil.

PROBLEME 5

1. Se dau dreptele paralele a, b, c şi un punct O, nesituat pe ele. Ducem din O perpendicularele OA, OB, OC respectiv pe a, b, c ($A \in a$, $B \in b$, $C \in c$). Sînt dreptele OA, OB, OC coplanare?

2. Se dau punctele A şi B. Prin A trec dreptele a, a', a'', iar prin B trec dreptele b, b', b'', perpendiculare şi concurente respectiv cu primele, în C, C', C''. Să se arate că există un punct O, astfel încît segmentele $OA \equiv OB \equiv OC \equiv OC' \equiv OC''$.

3. O dreaptă d este perpendiculară pe planul α. Două drepte a şi b sînt concurente şi paralele cu α. Este dreapta d, perpendiculară pe planul lor?

4. Fie OA şi OB două drepte perpendiculare. Un plan α ce conţine dreapta OA intersectează un alt plan β după dreapta g. Stabiliţi dacă dreptele OB şi g sînt perpendiculare.

5. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{A} = 90°$). Pe AB ca latură se construieşte dreptunghiul $ABMN$, ($MN \not\subset (ABC)$). Stabiliţi poziţia dreptei AB faţă de planul (ACN).

6. Să se determine locul geometric, în spaţiu, al punctelor egal depărtate de două puncte distincte A şi B date.

7. Se dau trei puncte necoliniare. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor din spaţiu, egal depărtate de cele trei puncte, este o dreaptă.

8. Se dau patru puncte necoplanare. Să se demonstreze că există un punct egal depărtat de ele şi să se determine acest punct.

9. Pe planul triunghiului ABC cu $AB = 7$ cm, se duc perpendicularele $AA' = 7$ cm şi $BB' = 7$ cm. Dacă $A'C \equiv B'C$, $A'C = 7\sqrt{2}$ cm, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

10. Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara în B. Pe aceasta se ia un punct B', astfel încît $BB' \equiv AB \equiv AC$, $(AB = a)$. Dacă $B'C = a\sqrt{2}$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

11. Un triunghi dreptunghic variabil ABC, cu unghiul $A = 90°$, are vîrfurile A şi B fixe şi cateta AC de lungime constantă. Care este locul geometric al vîrfului C?

12. Fie, într-un plan α, un hexagon regulat, $ABCDEF$, de latură 4 (puteţi lua orice unitate de măsură 4 m, 4 dm, 4 km etc.). În punctele A, B, C, D se ridică perpendicularele AA', BB', CC', DD', pe planul său, de lungimi: 1, 4, 2, 7 (în această ordine). Să se afle distanţele $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $B'C'$, $B'D'$, $C'D'$.

13. Într-un punct A, al unui cerc de centru O, se duce perpendiculara pe planul cercului pe care se ia un punct A' astfel încît $AA' = 5$ m. Ştiind că distanţa $A'O = 13$ m,

a. să se afle raza cercului;

b. locul geometric al lui M, mijlocul lui $A'O$, cînd A descrie cercul.

14. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se construiesc perpendicularele în A, B, D, pe care se iau segmentele: $AA' = 19$ cm, $BB' = 14$ cm, $DD' = 23$ cm. Dacă $A'B' = 13$ cm, şi $A'D' = 5$ cm, găsiţi laturile dreptunghiului $ABCD$.

15. Să se găsească locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de punctele unui cerc.

16. Să se găsească locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de vîrfurile unui pătrat.

17. În ce caz se poate duce printr-o dreaptă a, dată, un plan perpendicular pe o altă dreaptă dată b.

18. Să se demonstreze că dacă două drepte d_1 şi d_2 sînt perpendiculare, fără să fie situate în acelaşi plan, toate dreptele care întîlnesc pe d_1 şi sînt perpendiculare pe d_2 sînt conţinute în acelaşi plan.

19. Dreptele d_1 şi d_2 fiind date, în ce caz există un plan care conţine pe d_2 şi este perpendicular pe d_1?

20*. Dacă dreapta d, care trece prin punctul A al planului α, nu este perpendiculară pe α, atunci există o dreaptă a, conţinută în α, şi numai una, perpendiculară în A pe d.

Teorema celor trei perpendiculare

Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α şi prin piciorul ei trece o dreaptă a, conţinută în plan, perpendiculară pe o altă dreaptă b conţinută în plan, o dreaptă c care uneşte orice punct M al perpendicularei d pe plan, cu intersecţia P a celor două perpendiculare din plan, este perpendiculară pe a treia dreaptă b.

Demonstraţie. Se dă $d \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \perp b$ şi se cere să se arate că $c \perp b$ (fig. 6.1). Dreapta b, fiind conţinută în planul α, este perpendiculară pe d. Dar b este perpendiculară şi pe a, deci b este perpendiculară pe planul determinat de a şi d. Este, prin urmare, perpendiculară pe orice dreaptă conţinută în acest plan (a, d). Cum dreapta c are două puncte (M şi P) în acest plan, deci este conţinută în el, rezultă că dreapta b este perpendiculară pe c.

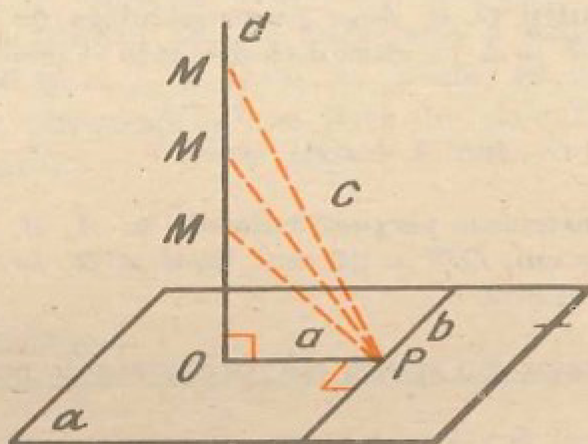


Fig. 6.1

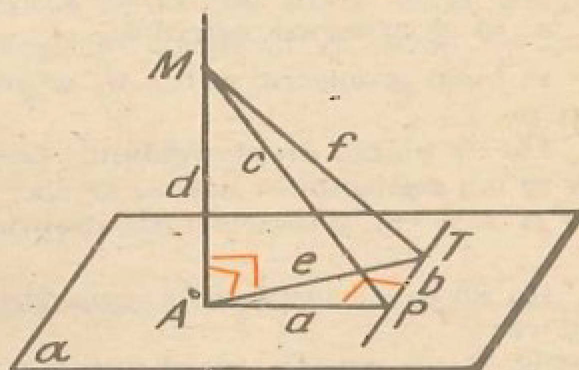


Fig. 6.2

Altă demonstraţie (notaţiile fiind cele din figura 6.2 şi literele mici reprezentînd, de data aceasta, măsurile segmentelor şi nu dreptele).

Luăm pe a treia perpendiculară un punct T ($PT = b$) şi, aplicînd teorema lui Pitagora, în triunghiurile MAP şi APT, avem:

$$d^2 = c^2 - a^2; \quad e^2 = a^2 + b^2; \quad f^2 = d^2 + e^2,$$

(unde $f = MT$, $e = AT$). Înlocuim, în a treia relaţie, pe d^2 din prima relaţie şi pe e^2 din a doua relaţie şi obţinem $f^2 = c^2 - a^2 + a^2 + b^2$ sau $f^2 = c^2 + b^2$. Din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că $\sphericalangle MPT = 90°$.

Reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare

Ni se pare mai simplu să le formulăm folosind direct figura.

1) Se dă $d \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $c \perp b$. Se cere $a \perp b$. (fig. 6.3).

Demonstraţie. Dreapta b este perpendiculară pe planul triunghiului MAP pentru că este perpendiculară pe două drepte concurente din acest plan (pe d şi pe c). Dar a este conţinută în planul triunghiului MAP. Rezultă că $b \perp a$.

2) Se dă $d \perp a$, $c \perp b$, $a \perp b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$. Se cere $d \perp \alpha$.

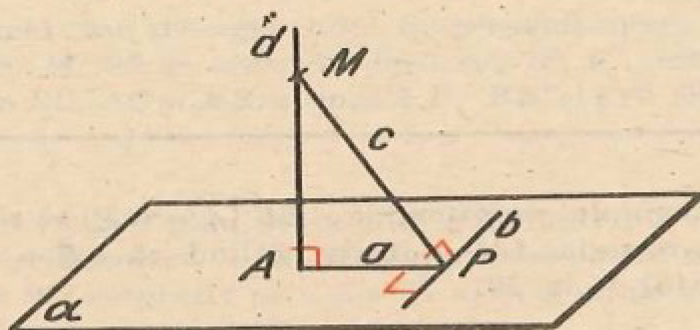


Fig. 6.3

Demonstraţie. Dreapta b este perpendiculară pe planul triunghiului MAP, fiind perpendiculară pe c şi pe a. Deci, este perpendiculară şi pe d, care este conţinută în planul lui MPA, avînd două puncte (M şi A) în acest plan. Deci $d \perp b$. Din ipoteză $d \perp a$, deci $d \perp \alpha$ (pentru că α conţine atît pe a cît şi pe b, concurente în P).

Exerciţiu. Încercaţi să demonstraţi una din aceste reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare şi prin reciproca teoremei lui Pitagora.

Comentariu. Cum se construieşte perpendiculara dintr-un punct pe un plan, folosind teorema celor trei perpendiculare? Luăm o dreaptă b în planul α. Fixăm piciorul P al perpendicularei din M pe b. Ducem apoi, în planul α, perpendiculara a în P pe dreapta b (fig. 6.4).

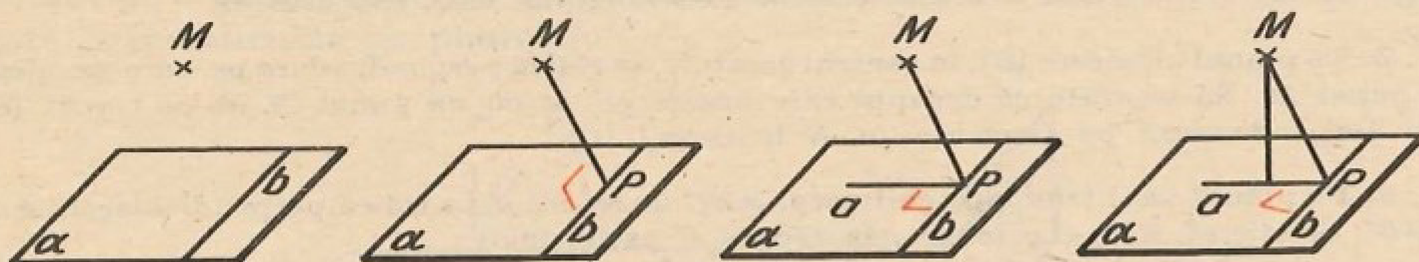


Fig. 6.4

Considerăm perpendiculara din M pe a (dusă în planul determinat de M şi a). Aceasta este dreapta căutată (MA).

Observație. Acest procedeu, în comparație cu cel din construcția anterioară a perpendicularei pe un plan dintr-un punct exterior, nu folosește intersecții de plane, date prin elementele lor, ci numai construcția unui plan ce trece printr-un punct și o dreaptă dată. Vom vedea că această construcție se va dovedi utilă în multe probleme de calcul.

De ce apar două teoreme reciproce la teorema celor trei perpendiculare?

Pentru că ipoteza este formată din două propoziții și am văzut, în clasa a VI-a, că, într-o astfel de situație, pot apărea două reciproce.

PROBLEME 6

1. În vîrful A al triunghiului dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90°$) se ridică perpendiculara pe planul triunghiului, pe care se ia $AM = 10$ cm. Știind că $AB = 40$ cm și $AC = 30$ cm, să se determine distanța lui M la BC.

2. Pe cercul (C) de centru O și rază $r = 8$ cm se iau două puncte A și B astfel încît $\overset{\frown}{AB} = 120°$. În O se ridică perpendiculara pe planul cercului pe care se ia $OM = 3$ cm. Să se determine distanța lui M la dreapta AB.

3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 9$ cm și $AD = 3$ cm. Fie E un punct pe diagonala AC, astfel încît $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$. În E se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului, pe care se ia $EF = 5$ cm. Să se determine distanța lui F la laturile dreptunghiului.

4. În vîrful A al unui hexagon regulat de latură a, se ridică o perpendiculară pe planul său, pe care se ia un segment $AM = b$. Să se calculeze distanțele lui M la laturile hexagonului dat.

5. Aceleași date de mai sus, să se calculeze distanțele lui M la diagonalele hexagonului.

6. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel ($AB \equiv AC$ și $AB = a$). În punctul D, piciorul înălțimii din A, se ridică perpendiculara pe planul triunghiului, pe care se ia un punct M astfel încît $DM = b$. Să se arate că triunghiul AMC este isoscel.

7. Pe planul unui cerc (C), în centrul acestuia, se ridică perpendiculara pe care se alege un punct M. Să se arate că dreapta care unește pe M cu un punct N de pe cercul (C) este perpendiculară pe tangenta în N la cercul (C).

8. Pe planul unui triunghi echilateral ABC de latură a, se ridică perpendicularele AA' și BB'. Se știe că $BB' = a$. Să se găsească AA' astfel încît:

a. triunghiul $A'B'C$ să fie dreptunghic ($\hat{B'} = 90°$).

b. triunghiul $A'B'C$ să fie isoscel, cu $A'B' \equiv A'C$.

9. O dreaptă d întîlnește un plan α în punctul A. Pe d se ia un punct fix B și fie o dreaptă variabilă g, care trece prin A și este conținută în α. Să se determine locul geometric al picioarelor perpendicularelor din B pe dreapta g.

10. Se dau o dreaptă fixă d și un punct fix $A(A \notin d)$. Un plan mobil α conține dreapta d. Din A ducem perpendiculara AP pe planul α $(P \in \alpha)$. Se cere:

a) să se arate că P descrie o curbă coplanară;

b) să se găsească locul geometric al punctului P în spațiu;

c) ce descrie punctul P pe planul α?

11. Fie O un punct în planul triunghiului ABC și D un punct pe perpendiculara în O pe acest plan. Să se arate că dacă $AD \perp BC$, atunci O se află pe înălțimea din A a triunghiului ABC.

12. Fie H ortocentrul unui triunghi ABC. Pe perpendiculara h, în H, pe planul ABC, se ia un punct oarecare M. Să se arate că dacă A', B', C' sînt picioarele perpendicularelor din M respectiv pe BC, AC și AB, atunci AA', BB' și CC' sînt înălțimile triunghiului ABC.

13. Fie A un punct al unui plan dat α și d, g două drepte concurente în H $(H \neq A)$ conținute în α. Pe perpendiculara în A pe planul α se ia un punct B, din care se duc perpendicularele BD și BG, respectiv pe d și g $(D \in d, G \in g)$. Să se arate că patrulaterul cu vîrfurile H, A, G, D este inscriptibil.

Plane perpendiculare

Fie un plan α și o dreaptă d perpendiculară pe el (fig. 7.1). Ele au un punct comun A. (Afirmația este evidentă: dacă d nu ar înțepa planul în A, ar rezulta că $d \parallel \alpha$. În acest caz, ducînd prin d un plan β, neparalel cu α, ar tăia planul α după o dreaptă $g (g \parallel d)$. Deci în α ar exista o dreaptă g care nu ar fi perpendiculară pe d, or d, fiind perpendiculară pe α, este perpendiculară pe *orice* dreaptă din α). Prin d, ducem un plan γ. Spunem că planul γ este perpendicular pe planul α.

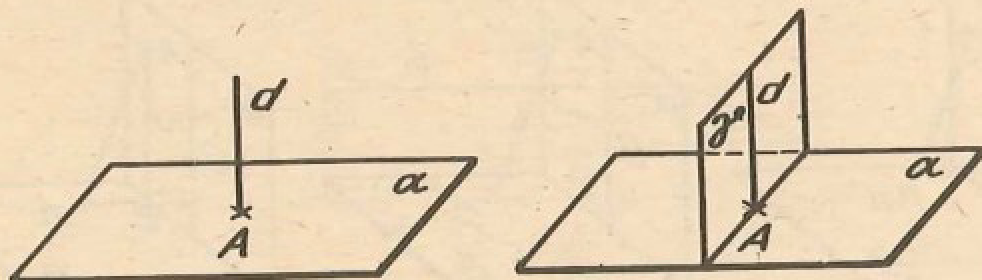


Fig. 7.1

Deci putem da următoarea:

Definiţie. *Un plan γ este perpendicular pe un alt plan α, dacă conţine o dreaptă ($d \subset \gamma$) perpendiculară pe acesta ($d \perp \alpha$).*

Vom demonstra că dacă $\gamma \perp \alpha$, atunci şi $\alpha \perp \gamma$. Notăm cu g intersecţia planelor α şi γ ($g = \alpha \cap \gamma$) (fig. 7.2). Ducem în planul α perpendiculara a pe g în punctul A. (Deci $a \subset \alpha$, $a \perp g$, $A \in a$). Dreapta a este perpendi-

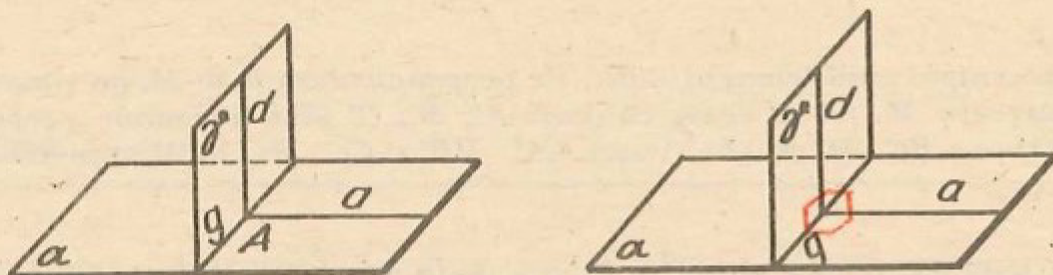


Fig. 7.2

culară pe planul γ, pentru că este perpendiculară pe două drepte ale sale $a \perp g$, $a \perp d$ (d se găseşte în planul γ şi este perpendiculară pe α). Cu alte cuvinte, planul α conţine dreapta a care este perpendiculară pe γ. Deci $\alpha \perp \gamma$. Am demonstrat astfel

Teorema. *Fiind date două plane α şi γ, dacă $\gamma \perp \alpha$ atunci şi $\alpha \perp \gamma$.*

Să căutăm să demonstrăm încă o teoremă.

Teoremă. *Dacă se dau două plane perpendiculare ($\alpha \perp \beta$), perpendiculara dintr-un punct oarecare al unuia ($A \in \alpha$) pe celălalt, este în întregime conţinută în primul plan ($AA' \subset \alpha$, $A' \in \beta$ şi $AA' \perp \beta$).*

Demonstraţie. Notăm cu $m = \alpha \cap \beta$. Prin reducere la absurd, presupunem că $AA' \perp \beta$ nu este conţinută în planul α. Dar α este perpendicular pe β, deci există în α o dreaptă g perpendiculară pe β (fig. 7.3), adică pe orice

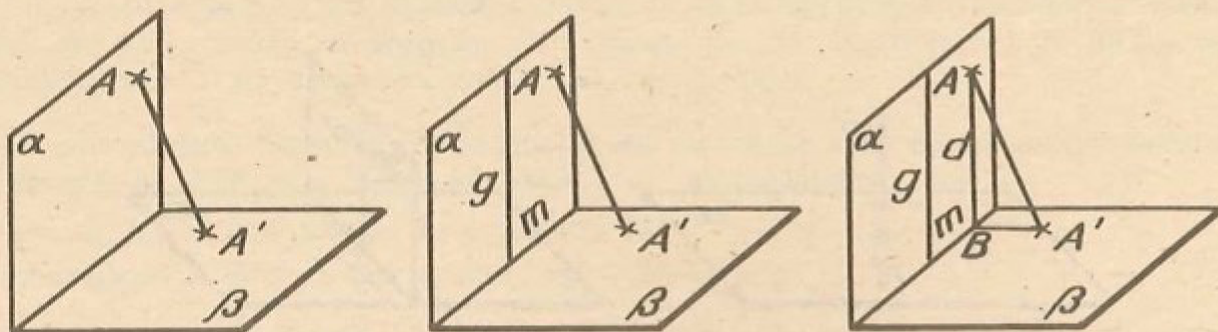


Fig. 7.3

dreaptă a lui β. Ducem prin A dreapta d paralelă cu g. Și ea va face același unghi cu toate dreptele din β. Dreapta d întîlnește dreapta m în B. În planul determinat de A, A', B, ar exista deci două drepte AB și AA' perpendiculare pe BA'. Dar acest lucru este imposibil, pentru că AB și AA' sînt concurente.

Rămîne numai cazul cînd g ar trece prin A, dar atunci problema este rezolvată, g fiind, prin definiție, conținută în α.

Perpendiculara comună a două drepte

Teoremă. *Dacă a și b sînt două drepte necoplanare, atunci există o dreaptă unică, perpendiculară atît pe a cît și pe b, care le întîlnește pe amîndouă.*

Cu alte cuvinte, există o dreaptă și numai una, perpendiculară pe două drepte necoplanare și care să se sprijine pe ele.

Existența. Dintr-un punct P al lui a, ducem b' paralelă cu b și considerăm planul α determinat de a și b' (fig. 7.4). Ducem planul β perpendicular pe α și care conține dreapta a. Acesta se intersectează cu dreapta b în M. Perpendiculara MN (din M pe a) este dreapta căutată. Într-adevăr, pentru că $\alpha \perp \beta$; $MN \subset \beta$, $MN \perp a$, rezultă $MN \perp \alpha$, deci $MN \perp b'$, deci $MN \perp b$. Și din construcție, $MN \perp a$.

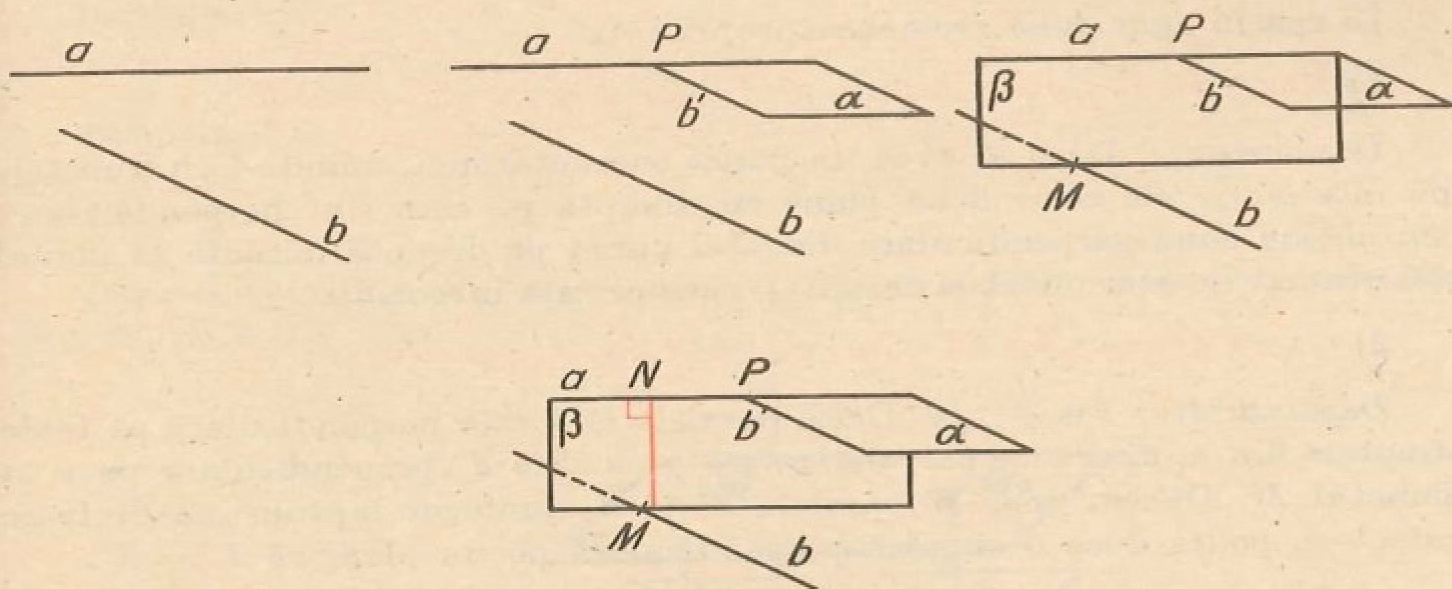


Fig. 7.4

Unicitatea. Presupunem, prin absurd, că ar exista două perpendiculare MN și PQ pe a și b, cu punctele M, P situate pe b și N, Q pe a, (a și b fiind necoplanare) (fig. 7.5). Din Q ducem QS paralelă cu MN și considerăm

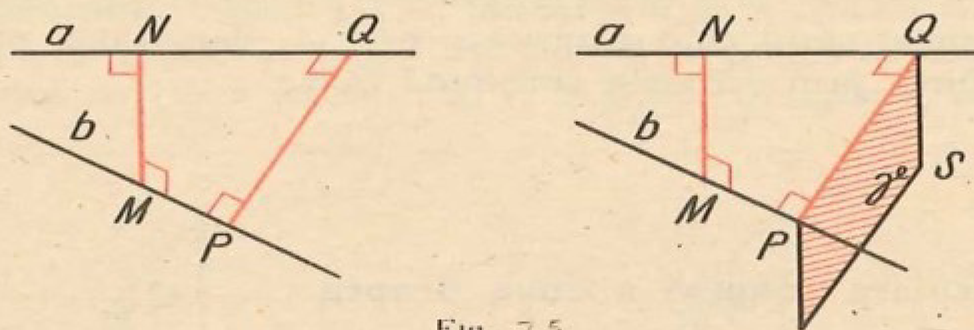


Fig. 7.5

planul γ determinat de PQ și QS. Dreptele a și b sînt perpendiculare, ambele, pe planul γ, fiind perpendiculare pe două din dreptele sale. Ar însemna că a și b sînt paralele, dar ele sînt necoplanare, iată contradicția. Ar rămîne de studiat cazul cînd cele două perpendiculare ar avea pe una din dreptele a sau b, un punct comun. De pildă $N = Q$. Lăsăm pe seama cititorului să „elimine" și acest caz.

Perpendicularitate și paralelism

În plan, această legătură se exprimă prin: *Două drepte perpendiculare pe o a treia sînt paralele.*

În spațiu apar două asemenea proprietăți:

1) *Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele.*

Demonstrație. Dacă ar avea un punct comun atunci, unindu-l cu punctele de intersecție ale celor două plane cu dreapta pe care sînt perpendiculare, am obține două perpendiculare din acel punct pe dreaptă (situate în planul determinat de acel punct și dreaptă), ceea ce este imposibil.

2) *Două drepte perpendiculare pe un plan sînt paralele.*

Demonstrație: Fie $d \perp \alpha$. Orice paralelă la d este perpendiculară pe toate dreptele din α, deci este perpendiculară pe α. Fie d' perpendiculara pe α în punctul M. Ducem prin M paralela d'' la d. Conform faptului că dintr-un punct se poate duce o singură perpendiculară pe un plan, că $d' = d''$.

Observație. În spațiu, nu este adevărat că două drepte perpendiculare pe o a treia sînt paralele.

PERPENDICULARE ȘI OBLICE. DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA UN PLAN

Teoremă. *Fie M un punct în spațiu, α un plan și N piciorul perpendicularei duse din M pe α.*

a. Dacă $P \in \alpha$, $P \neq N$, atunci $MP > MN$.

b. Dacă P_1, P_2 sînt puncte din α, atunci $NP_1 \equiv NP_2$, dacă și numai dacă, $MP_1 \equiv MP_2$.

Demonstrația este imediată, considerînd triunghiul MNP, respectiv triunghiurile MNP_1, MNP_2 (fig. 7.6).

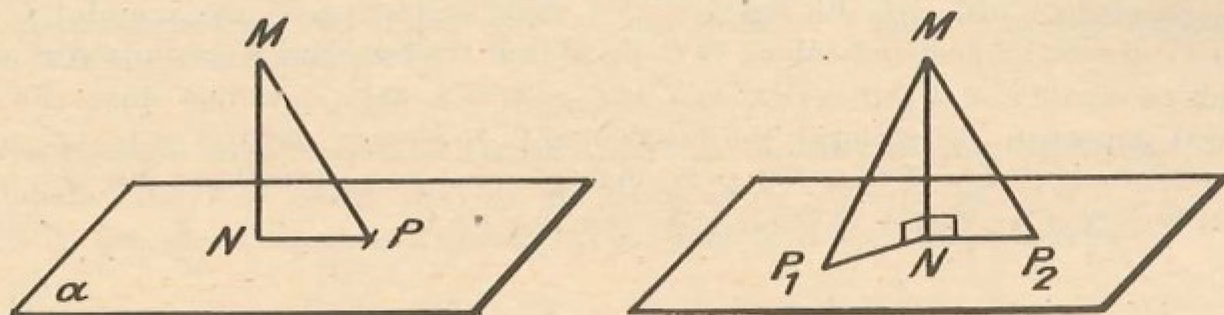


Fig. 7.6

Observație. Teorema se poate formula și astfel: perpendiculara dintr-un punct pe un plan este mai scurtă decît orice oblică dusă din același punct la plan; două oblice duse din același punct la un plan sînt congruente, atunci și numai atunci, cînd picioarele lor sînt egal depărtate de piciorul perpendicularei.

Definiție. *Prin distanța de la un punct M la un plan α, înțelegem lungimea MN, unde $N \in \alpha$ este piciorul perpendicularei duse din M pe α.*

Teoremă. *Fie α, β două plane paralele. Atunci distanța de la punctele $M \in \alpha$ la planul β este constantă. Această constantă se numește distanța între planele paralele α și β.*

Demonstrație. Fie M_1, $M_2 \in \alpha$ și N_1, N_2 picioarele perpendicularelor din M_1, M_2 pe β (fig. 7.7).

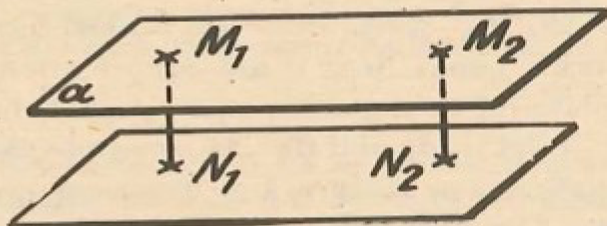


Fig. 7.7.

Știm că $M_1N_1 \| M_2N_2$ (perpendicularitate și paralelism), deci M_1, N_1, N_2, M_2 sînt în același plan. De la proprietățile planelor paralele știm că $M_1M_2 \| N_1N_2$, deci $M_1N_1N_2M_2$ este dreptunghi și deci $M_1N_1 = M_2N_2$, ceea ce trebuia demonstrat.

Aplicații. Se pot dovedi ușor, folosind teorema asupra oblicelor congruente, următoarele afirmații:

1. *Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de vîrfurile unui triunghi este perpendiculara dusă din centrul cercului circumscris triunghiului pe planul acestuia.*

Demonstrație. Cu notațiile din figura 7.8, A, B, C sînt vîrfurile triunghiului, O centrul cercului circumscris, d perpendiculara în O pe planul triunghiului și M un punct oarecare al ei. Știm că razele $OA \equiv OB \equiv OC$, deci $MA \equiv MB \equiv MC$, ca oblice duse din același punct, egal depărtate de piciorul perpendicularei. *Reciproc*: dacă N este un punct în spațiu, astfel încît $NA \equiv NB \equiv NC$ și N' este piciorul perpendicularei din N pe planul (ABC), atunci $N'A \equiv N'B \equiv N'C$, deci N' coincide cu O.

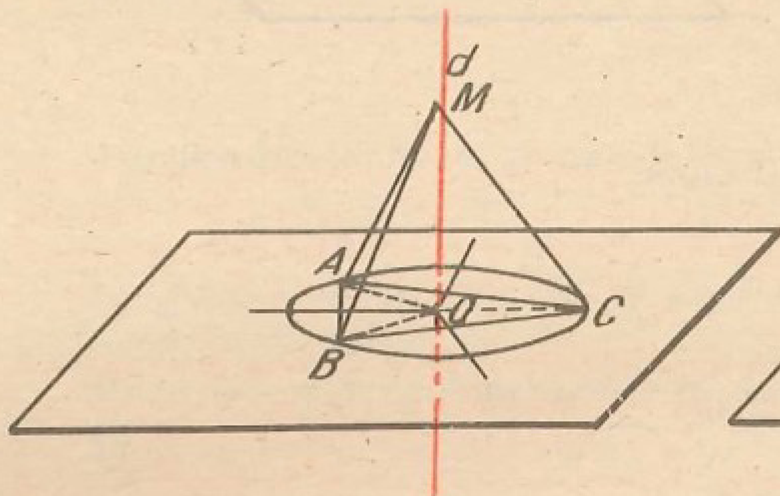


Fig. 7.8

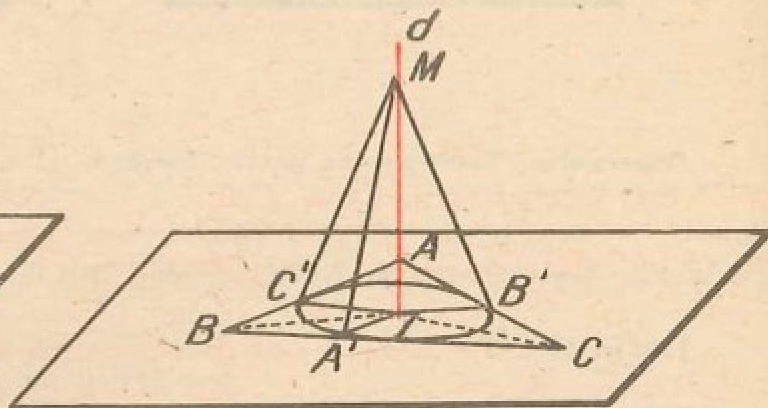


Fig. 7.9

2. *Locul geometric al punctelor egal depărtate de laturile unui triunghi este perpendiculara pe planul său, în centrul cercului înscris în triunghi.*

Demonstrație. Cu notațiile din figura 7.9, A, B, C sînt vîrfurile triunghiului, I centrul cercului înscris, d perpendiculara în I pe planul triunghiului și M un punct curent al ei. Avem: $MA' \equiv MB' \equiv MC'$, ca oblice duse din același punct, egal depărtate de piciorul perpendicularei. Deci, orice punct $M \in d$ are proprietatea cerută. Reciproc, considerînd un punct M exterior planului triunghiului (ABC), astfel încît distanțele la laturile lui să fie egale $(MA' = MB' = MC')$, ducînd din M perpendiculara MI' pe planul triunghiului (I' în acest plan) și aplicînd o reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare avem: $I'A' = I'B' = I'C'$; deci I și I' coincid.

1. Dreptunghiul $ABCD$ cu laturile $AB = 3$ cm, $BC = 12$ cm, se îndoaie de-a lungul dreptei MN (M mijlocul lui AD, N mijlocul lui BC), pînă cînd planele AMB și DCN devin perpendiculare. Să se afle lungimea segmentului BD după îndoire.

2. Un trapez isoscel $ABCD$ are baza mare $AB = 22$ cm, baza mică $CD = 10$ cm și latura neparalelă egală cu 10 cm. Se îndoaie trapezul în lungul liniei mijlocii MN, pînă cînd planele (ABM) și (DCN) devin perpendiculare. Să se afle distanța, după îndoire, de la punctul D la baza AB.

3. Dreptunghiul $ABCD$ se îndoaie de-a lungul diagonalei AC, pînă cînd planele ACB și ACD devin perpendiculare. Dacă $AB = 3$ cm și $BC = 4$ cm, să se afle lungimea segmentului BD, după îndoire.

4. Un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90°$) se îndoaie în lungul înălțimii AD, pînă cînd planele ABD și ADC devin perpendiculare. Știind că $AB = 2\sqrt{6}$ cm și $AC = 2\sqrt{10}$ cm, să se calculeze distanța între punctele B și C, după îndoire.

5. Două triunghiuri dreptunghice isoscele ABC, ($\hat{A} = 90°$) și ADC, ($\hat{C} = 90°$) au cateta $AC = a$ comună și planele perpendiculare. Să se calculeze lungimea segmentului BD.

6. Fie α și β două plane perpendiculare și A și B două puncte ($A \in \alpha$, $B \in \beta$). Știind că punctele A, B sînt situate la o distanță de 3 m față de dreapta de intersecție a celor două plane și că $AB = \sqrt{34}$ m, să se calculeze distanța între M și N (picioarele perpendicularelor duse din A și B pe dreapta de intersecție a celor două plane).

7. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele.

8. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente.

9. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.

10. Dacă numim „plan bisector" locul geometric găsit la problema precedentă, atunci, să se arate că, fiind date trei plane care au un punct comun, și numai unul, planele bisectoare au o dreaptă comună.

11. Fie OA, OB, OC trei segmente perpendiculare două cîte două. Perpendiculara din O pe planul triunghiului ABC cade în punctul de întîlnire al înălțimilor triunghiului ABC.

12. Un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($\hat{A} = 90°$) se îndoaie de-a lungul înălțimii AA', pînă cînd planele triunghiurilor $AA'B$, $AA'C$ devin perpendiculare. Să se demonstreze că triunghiul ABC, obținut după îndoire, are un unghi de 60°.

13. În triunghiul ABC, se consideră linia mijlocie MN ($M \in AB$ și $N \in AC$ și secanta $AP(P \in BC)$, $AP \cap MN = P'$. Se îndoaie triunghiul de-a lungul lui MN, astfel încît planele AMN și BMN să fie perpendiculare. Să se demonstreze că triunghiul nou format. $PP'A$ este isoscel.

14[1]**.** Să se arate că prin orice dreaptă, situată într-un plan α, trece un plan unic perpendicular pe α.

15. Dacă dreptele a și b sînt perpendiculare și dacă $a \perp \alpha$ și $b \perp \beta$ (α și β fiind două plane), atunci $\alpha \perp \beta$.

16. Dacă o dreaptă d este intersecția a două plane α, β perpendiculare pe un plan γ, atunci $d \perp \gamma$.

PROIECȚII

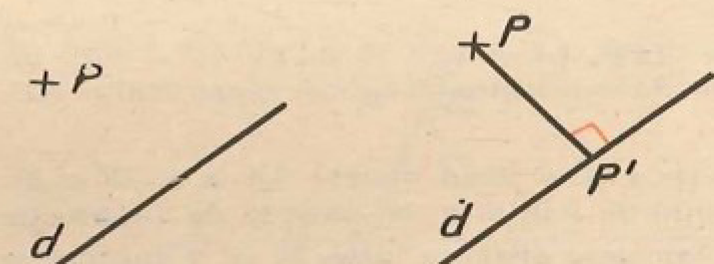


Fig. 8.1.

Definiție. *Se numește proiecție a unui punct P pe o dreaptă d, piciorul perpendicularei duse din P pe dreapta d (într-un plan care conține punctul P și dreapta d)* (fig. 8.1).

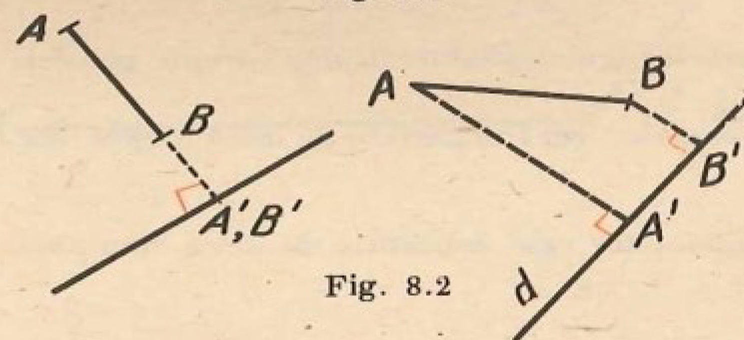


Fig. 8.2

La fel ca în geometria în plan, se constată că proiecția unui segment pe o dreaptă este un punct sau un segment (fig. 8.2).

În teoremele de mai jos vom conveni să considerăm $\cos 0° = 1$ și $\cos 90° = 0$.

Teoremă. *Lungimea proiecției $A'B'$ a unui segment AB pe o dreaptă d este egală cu lungimea segmentului înmulțită cu cosinusul unghiului u dintre d și dreapta ce conține segmentul.*

Demonstrație. Teorema este cunoscută în cazul în care A, B și d sînt coplanare. În cazul cînd A, B și d nu sînt coplanare, avem, desigur: $B \neq B'$, $A \neq A'$, iar A, A', B nu sînt coliniare.

---

[1] Vă sfătuim să rețineți rezultatele problemelor 14, 15, 16 pentru că ele vă pot fi utile în rezolvarea altora...

Să alegem pe paralela la AB dusă prin A', de aceeaşi parte a dreptei AA' ca şi B, un punct B'' aşa încît $A'B'' \equiv AB$ (fig. 8.3).

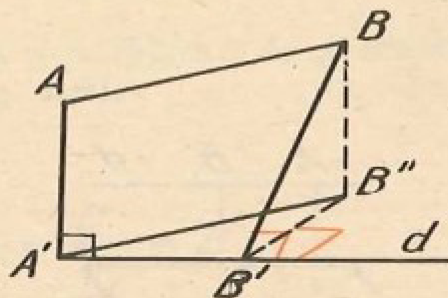


Fig. 8.3

Patrulaterul $AA'B''B$ este un paralelogram, deci $BB'' \parallel AA'$, $BB'' \perp d$. Sau B'' este pe dreapta BB', sau d perpendiculară pe planul $BB'B''$. În ambele cazuri, B'' este în planul perpendicular pe d în B', deci B' este proiecţia lui B'' pe d. Cum u este unghiul dintre d şi $A'B''$, iar d şi $A'B''$ sînt coplanare, avem $A'B' = A'B'' \cdot \cos u = AB \cdot \cos u$.

PROIECŢII PE UN PLAN

Definiţie. *Proiecţia ortogonală a unui punct A pe un plan este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe plan.*

Perpendiculara din punctul A pe plan se numeşte *proiectanta* lui A. Proiectanta lui A pe un plan este unică. Într-adevăr, să presupunem că ar fi două, unind picioarele perpendicularelor pe plan am obţine, împreună cu punctul A, un triunghi cu două unghiuri drepte, ceea ce este imposibil.

Evident, cînd punctul se găseşte pe plan, atunci el coincide cu proiecţia sa (fig. 8.4).

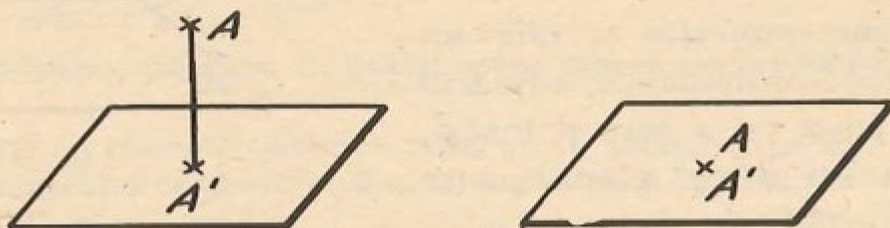


Fig. 8.4

Pentru că deocamdată nu cunoaştem altă proiecţie decît cea ortogonală îi vom spune acesteia, pe scurt, proiecţie.

Prin proiecţia unei figuri oarecare pe un plan, înţelegem locul geometric al proiecţiilor punctelor sale pe acel plan.

Teoremă. *Proiecţia unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.*

Demonstrație. Cazul **1.** Cînd dreapta d nu este perpendiculară pe plan, atunci proiecția ei pe acest plan este o dreaptă (fig. 8,5).

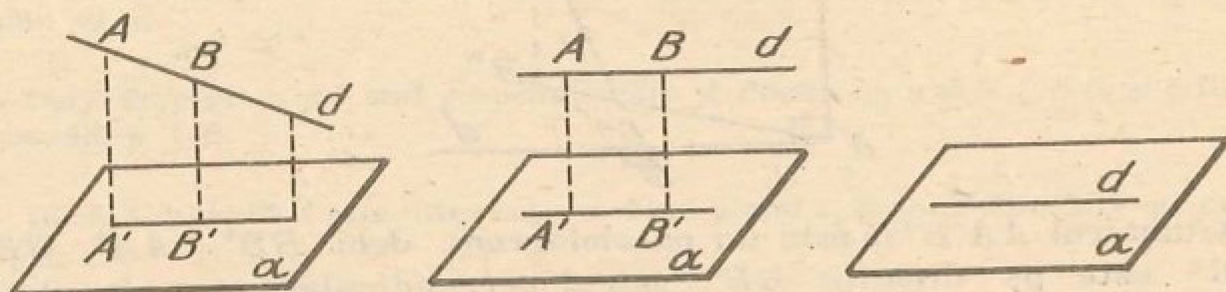


Fig. 8.5

Considerăm punctul A fix pe dreaptă și punctul B mobil pe aceeași dreaptă. Fie A' și B' proiecțiile acestor puncte pe planul dat. BB', „sprijinindu-se" pe dreapta d și avînd o direcție dată (aceeași cu a lui AA' — pentru că două drepte perpendiculare pe un plan sînt paralele), generează un plan. Intersecția acestuia cu planul inițial α este evident o dreaptă. Cea căutată. Evident, orice punct $M' \in A'B'$ este proiecția unui punct $M \in AB$, pentru că dacă o secantă taie o dreaptă, taie orice paralelă a ei.

Observație. Dacă dreapta este paralelă cu planul, proiecția ei va fi paralelă cu ea. Dacă dreapta este conținută în plan, ea coincide cu proiecția ei.

Cazul **2.** *Dreapta este perpendiculară pe plan.*

În acest caz *proiecția ei este un punct*, deoarece proiectanta oricărui punct A de pe d pe α este d însăși. Deci proiecția lui d pe planul α se reduce la punctul de intersecție a lui d cu α (fig. 8.6).

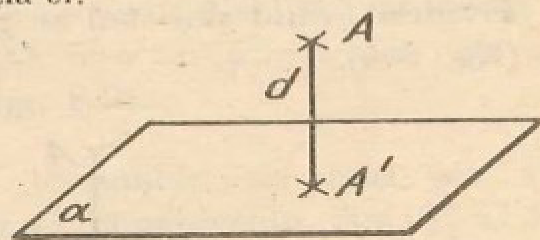


Fig. 8.6

Observație. Nu trebuie înțeles însă că dacă proiecția unei curbe pe un plan este o dreaptă, curba aceasta este o dreaptă. Astfel, proiecția oricărei curbe plane pe un plan perpendicular pe planul ei este o porțiune din dreapta de intersecție a celor două plane (fig. 8.7).

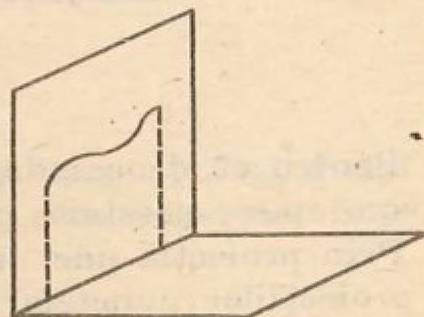


Fig. 8.7

Teoremă. *Proiecția unui segment este tot un segment sau un punct.*

Demonstrație. Cazul **1.** Segmentul de proiectat nu este perpendicular pe plan.

Problemă se reduce la o problemă de geometrie în plan, în planul determinat de proiectante (fig. 8.8).

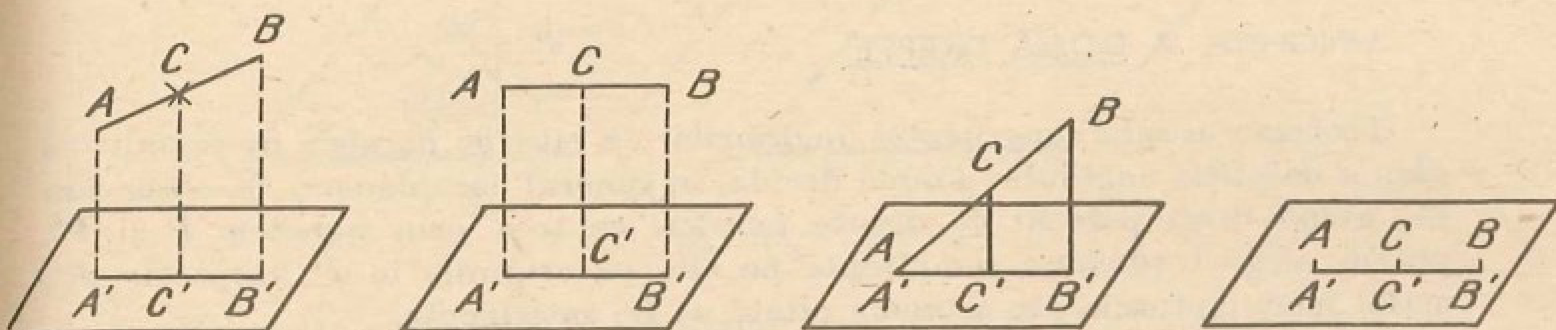


Fig. 8.8

Cazul **2.** Segmentul, care se proiectează, este perpendicular pe plan, atunci proiecția sa este un punct.

Într-adevăr, întreaga dreaptă-suport a segmentului se proiectează într-un punct. Deci și segmentul conținut în ea.

PROBLEME 8

1. Trei puncte coliniare A, B, C se proiectează pe un plan în A', B', C'. Să se demonstreze că $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

2. Fie ABC un triunghi și $A'B'C'$ proiecția lui pe un plan α. Dacă A_1, B_1, C_1 sînt mijloacele segmentelor BC, CA, AB, atunci aceste trei puncte se proiectează, pe α, în mijloacele segmentelor $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

3. Fie a, b două drepte paralele. Ce puteți spune despre proiecțiile lor, a' și b', pe un același plan?

4. Se proiectează un triunghi oarecare ABC pe un plan α în $A'B'C'$. Să se demonstreze că proiecția centrului de greutate G al triunghiului ABC este centrul de greutate G al triunghiului $A'B'C'$.

5. Triunghiul echilateral ABC ($AB = a$) are latura BC conținută în planul α, iar A' este proiecția lui A pe α. Știind că $\sphericalangle BA'C = 90°$, să se calculeze tg $\widehat{A'BA}$.

6. Unghiul $\widehat{AOB} = 90°$ are latura OA paralelă cu planul α. Dacă A', O', B' sînt proiecțiile punctelor A, O, B pe α, arătați că $\widehat{A'O'B'} = 90°$.

7. Triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) are punctul B în planul α, iar C și A de aceeași parte a planului α. Fie A' și C' proiecțiile punctelor A și C pe α. Știind că triunghiurile $AA'B$ și $A'BC'$ sînt dreptunghice și isoscele ($A'B \equiv BC'$ și $A'B = a$), să se calculeze lungimea segmentului CC'.

8. Triunghiul isoscel ABC se proiectează pe planul α, ce conține pe BC, după triunghiul dreptunghic $A'BC$. Știind că $A'B = 4$ cm, $A'C = 3$ cm, să se calculeze:

a) cosinusul unghiului ABC;

b) lungimea laturii necongruente cu celelalte ale triunghiului ABC.

UNGHIUL A DOUĂ DREPTE

Teorema asupra congruenței unghiurilor cu laturile paralele ne permite să dăm o definiție unghiului a două drepte, în general necoplanare. Să observăm că, avînd două perechi de drepte paralele ce trec prin punctele P și P', putem alege totdeauna semidrepte pe ele, cu originile în P, respectiv P', astfel încît ipotezele din teorema citată să fie satisfăcute.

Definiție. *Prin unghiul a două drepte din spațiu înțelegem orice unghi mai mic, cel mult egal cu 90°, format, în orice punct al spațiului, prin ducerea de paralele la dreptele date* (fig. 9.1).

De multe ori vom folosi drept „unghi a două drepte", măsura lui.

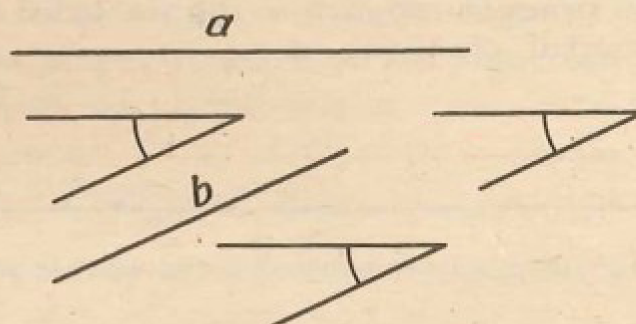


Fig. 9.1

Observație. Unghiul a două drepte este 0° dacă și numai dacă dreptele sînt paralele.

UNGHIUL UNEI DREPTE CU UN PLAN

Definiție. *Numim unghiul unei drepte cu un plan, unghiul făcut de acea dreaptă cu proiecția ei pe plan* (în cazul cînd dreapta nu este perpendiculară pe plan și nici paralelă cu el) (fig. 9.2).

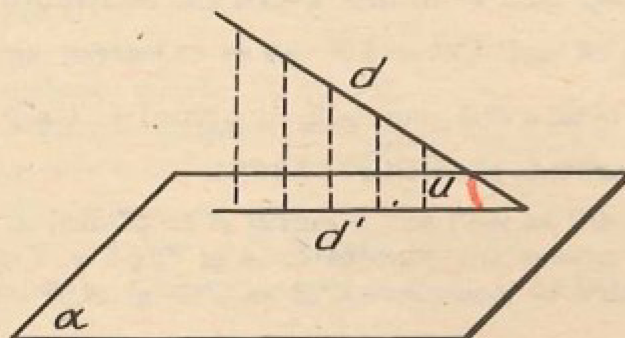


Fig. 9.2

Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, vom considera unghiul dreptei cu planul respectiv de 90° (fig. 9.3, a).

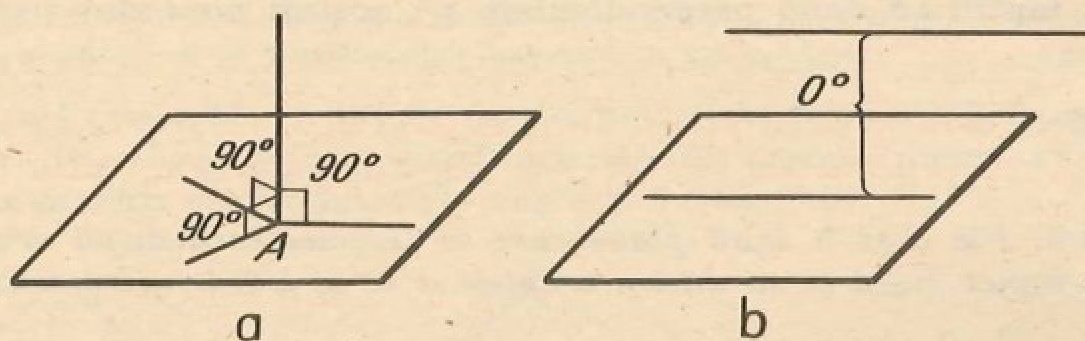


Fig. 9.3

Dacă dreapta este paralelă cu planul, vom conveni să spunem că dreapta face cu planul un unghi de 0° (fig. 9.3, b).

Unghiul u al unei drepte cu un plan este deci cuprins între 0° şi 90° ($u \in [0°, 90°]$).

Teoremă. *Unghiul unei drepte d cu un plan α este cel mai mic dintre unghiurile formate de acea dreaptă cu o dreaptă oarecare a planului.*

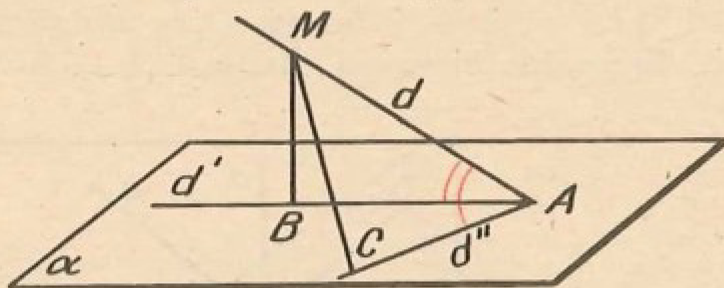


Fig. 9.4

Demonstraţie. Dreapta d se proiectează pe planul α după dreapta $d'(A = d \cap \alpha)$. Considerăm o altă dreaptă $d'' \subset \alpha$, pe care o putem presupune că trece prin A. Din $M \in d$, ducem $MB \perp d'$. Luăm pe d'', în direcţia în care formează un unghi ascuţit cu d, segmentul $AC \equiv AB$. Triunghiurile MAB şi MAC au cîte două laturi respectiv congruente (MA comună şi $AB \equiv AC$) şi $MC > MB$ (segmentul oblicei este mai mare decît segmentul perpendicularei). Se ştie că în două triunghiuri care au cîte două laturi respectiv congruente, laturei a treia mai mari i se opune un unghi mai mare şi reciproc, deci $\sphericalangle MAC > \sphericalangle MAB$, şi teorema este demonstrată.

Observaţie. În particular, dacă unghiul unei drepte a (din planul α) cu d, este congruent cu unghiul dreptei d cu proiecţia sa pe α, putem trage concluzia că acea dreaptă a este paralelă cu proiecţia dreptei d pe α.

Comentariu. Definiţia distanţei de la un punct la un plan şi definiţia unghiului dintre o dreaptă şi un plan apar analoage: anume ambele elemente sînt cele mai mici posibile, dintre toate cele care pot fi propuse.

Observație. Unghiul dintre o dreaptă și un plan este complementar unghiului dintre acea dreaptă și o perpendiculară pe acel plan. Aceasta ar fi putut fi luată și ca definiție.

Reamintindu-ne o observație relativă la unghiul unei drepte cu un plan, precum și faptul că două perpendiculare pe același plan sînt paralele, dăm următoarea:

Definiție. *Fie α, β două plane. Prin unghiul dintre α și β înțelegem valoarea comună a tuturor unghiurilor formate între două drepte a și b, unde $a \perp \alpha$, $b \perp \beta$.*

Teoremă. *Fie α și β două plane care se intersectează după dreapta d. Să alegem un punct $P \in d$ și să ducem dreptele $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, perpendiculare în P pe d.*

Atunci unghiul dintre planele α, β este congruent cu unghiul dintre dreptele a și b.

Demonstrație. Să considerăm planul π, perpendicular în P pe d. El va conține dreptele a și b (fig. 9.5). Planul π va fi perpendicular pe planele α și β, deci el va conține două drepte a', b' ce trec prin P, perpendiculare pe α, respectiv β (fig. 9.6). Rezultă $a' \perp a$, $b' \perp b$. Unghiul dintre planele α, β este congruent cu unghiul ascuțit format de a' și b', care, avînd laturile perpendiculare pe cele ale unghiului ascuțit format de a și b, este congruent cu acesta.

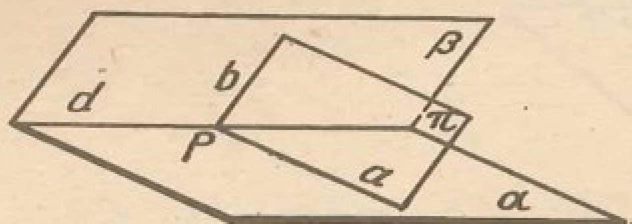


Fig. 9.5

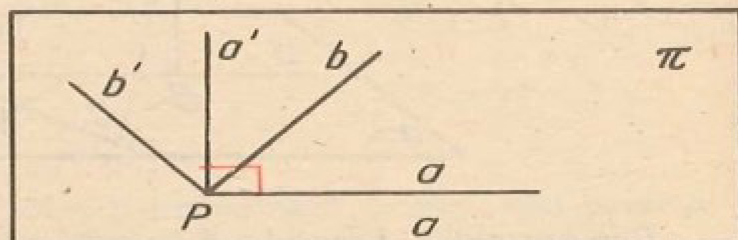


Fig. 9.6

Observație. Două plane sînt perpendiculare dacă și numai dacă unghiul lor este de 90°. Două plane sînt paralele dacă și numai dacă unghiul lor este de 0°.

UNGHIURI DIEDRE

Definiție. *Vom numi unghi diedru, figura formată de două semiplane delimitate de aceeași dreaptă d în două plane diferite α, β ce conțin d. Dreapta d se va numi muchia diedrului* (fig. 9.7).

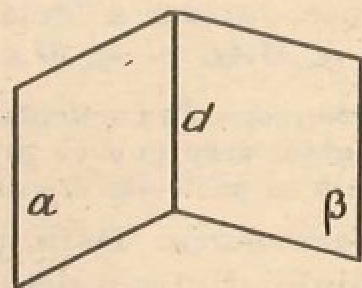


Fig. 9.7

Vom numi unghi plan al unghiului diedru valoarea unghiului dintre două semidrepte a, b, ambele avînd originea într-un punct $P \in d$, conținute respectiv în cele două semiplane ce formează diedrul, și perpendiculare pe d.

Observație. Unghiul planelor α și β este congruent cu unghiul plan al diedrului, dacă acesta nu este obtuz, și cu suplementul acestuia, în caz contrar.

Problemă rezolvată. Se dau în spațiu două semiplane α și β, care au muchia comună m. Se cunoaște că perpendicularele din același punct $M \in m$, $u \subset \alpha$ și $v \subset \beta$ pe muchia m, fac între ele unghiul θ (fig. 9.8).

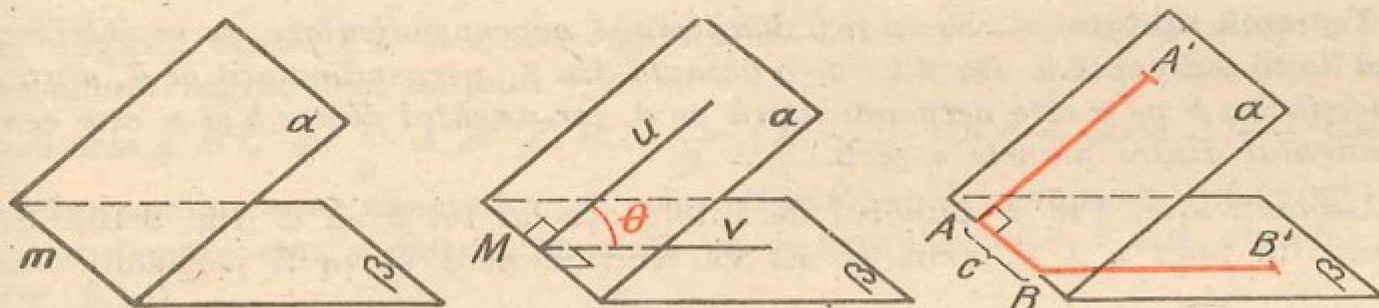
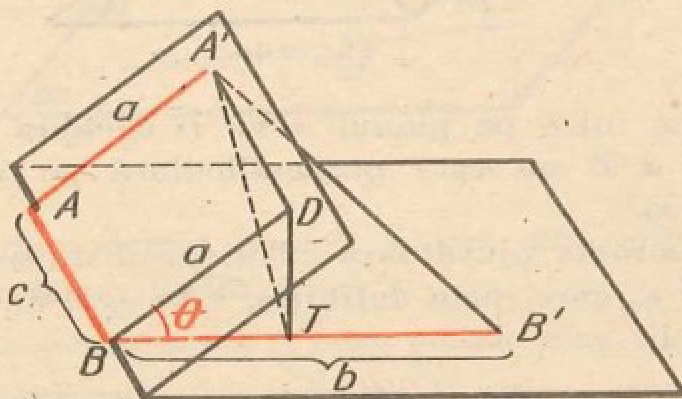


Fig. 9.8

Fie pe muchia m, segmentul $AB = c$, și în planele α și β segmentele $A'A = a$, $B'B = b$, ambele perpendiculare pe c.

Fig. 9.9



Să se calculeze în funcție de a, b, c și θ segmentul $A'B'$.

Ducem segmentul BD paralel și congruent cu AA', deci $BD = a$. Ducem DT perpendicular pe BB', deci triunghiurile BDT, $A'TB'$ și $A'DT$ sînt dreptunghice. Rezultă $DT = a \cdot \sin\theta$ și de aici $A'T^2 = DT^2 + A'D^2 = c^2 + a^2 \cdot \sin^2\theta$. În triunghiul $A'TB'$ se poate aplica teorema lui Pitagora: $A'B'^2 = (b - a \cdot \cos\theta)^2 + c^2 + a^2 \cdot \sin^2\theta = b^2 - 2ab \cdot \cos\theta - a^2 \cdot \cos\theta + c^2 + a^2 \cdot \sin\theta$ și, știind că $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, rezultă: $A'B'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos\theta$.
Această formulă „seamănă" cu teorema cosinusului. Unghiul θ joacă un rol deosebit în calculul unui segment cu capetele în două plane care au o dreaptă comună. În fond θ nu este decît unghiul plan al unghiului diedru inițial...

Teoremă. *Lungimea proiecției unui segment pe un plan α este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și cosinusul unghiului u dintre dreapta d ce conține segmentul și planul α.*

Demonstrație. Dacă $d \perp \alpha$, atunci $u = 90°$ şi cos $u = 0$, proiecţia este un punct etc. Dacă $u \neq 90°$, fie d' proiecţia lui d pe α. Proiecţia segmentului pe planul α coincide cu proiecţia sa pe dreapta d', u este, prin definiţie, unghiul dintre dreptele d și d' și teorema rezultă adevărată pe baza celei precedente.

Înainte de a stabili un rezultat asupra ariei unei proiecţii, vom demonstra:

Teoremă ajutătoare. *Fie α și β două plane neperpendiculare, ce se intersectează după o dreaptă d. Dacă b este o dreaptă din β, perpendiculară pe d, atunci proiecția lui b pe α este perpendiculară pe d, iar unghiul dintre b și α este egal cu unghiul dintre planele α și β.*

Demonstrație. Fie P punctul de intersecţie al lui b cu d (fig. 9.10). Să ducem un plan $\pi \perp d$, prin P. El va conţine pe b şi va fi perpendicular

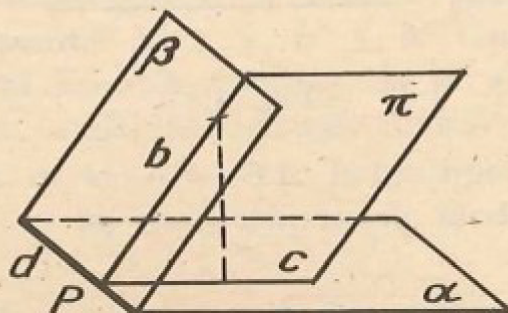


Fig. 9.10

pe α, deci proiecţia lui b pe planul α va fi dreapta $c = \pi \cap \alpha$, care va fi perpendiculară pe d (b nu este perpendiculară pe α, deoarece β nu este perpendicular pe α).

S-a văzut în teorema ajutătoare că unghiul dintre α și β este egal cu unghiul dintre b și d, care, prin definiţie, este egal cu unghiul dintre b și α. Acum putem dovedi:

Teoremă. *Aria proiecției $A'B'C'$ a unui triunghi ABC pe un plan α este egală cu produsul dintre aria triunghiului ABC și cosinusul unghiului u dintre planul triunghiului și planul α.*

Demonstrație. Dacă $u = 90°$, triunghiul se proiectează după un segment (cos $u = 0$) etc. Dacă $u = 0°$, triunghiul se proiectează după unul egal cu el, conform teoremei precedente (cos $u = 1$) etc.

Fie deci, $0° < u < 90°$. Planul α va avea cu planul triunghiului o dreaptă comună d.

Să considerăm întîi cazul în care triunghiul ABC are o latură, (fie ea AB), paralelă cu d (fig. 9.11). Să ducem înălţimea CD a triunghiului. Conform teoremei ajutătoare, proiecţia lui CD este înălţimea $C'D'$ a triunghiului $A'B'C'$.

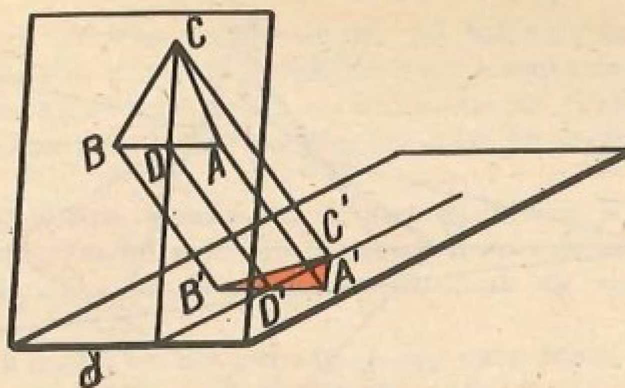


Fig. 9.11

iar unghiul dintre CD şi α este egal cu u. Conform teoremei relative la proiecţia unui segment pe un plan vom avea: $C'D' = CD \cdot \cos u$ şi $A'B' = AB$, deci aria $A'B'C' = \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot C'D' = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u =$ (aria ABC) $\cdot \cos u$.

În cazul general, observăm că orice triunghi se descompune în triunghiuri, avînd fiecare cîte o latură paralelă cu o dreaptă dată d din planul său (fig. 9.12).

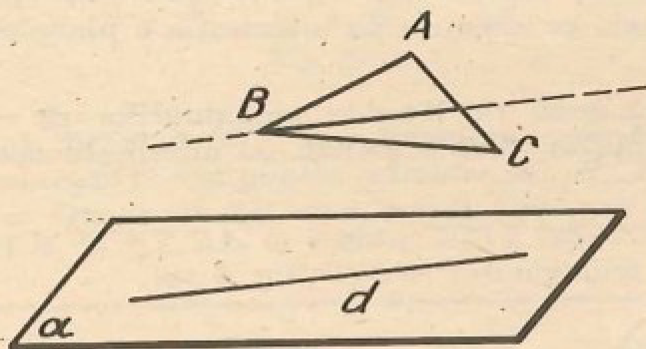


Fig. 9.12

Scriem relaţia de demonstrat pentru fiecare din aceste triunghiuri, le adunăm şi obţinem relaţia dorită.

Observaţie. Teorema se generalizează la orice poligon plan.

Teorema lui Desargues*. *Din punctul V pornesc trei semidrepte a, b, c, necoplanare toate trei. Pe semidreapta a luăm punctele A, A', pe semidreapta b luăm B, B' şi pe semidreapta c luăm C, C', astfel încît laturile triunghiurilor ABC şi A'B'C' să nu fie, respectiv, paralele. Atunci dreptele AB şi A'B', BC şi B'C', CA şi C'A' se întîlnesc în trei puncte coliniare* (fig. 9.13).

Demonstraţie. Vom arăta, mai întîi, că dreptele AC cu $A'C'$, AB cu $A'B'$ şi BC cu $B'C'$ se întîlnesc şi apoi că punctele lor de intersecţie sînt coliniare.

Într-adevăr, punctele A, A', C, C' sînt coplanare (A şi A' sînt situate pe dreapta a, iar C şi C' pe dreapta c; dreptele a şi c sînt concurente, deci coplanare).

---

* Textele însemnate cu o bară la marginea paginii sînt facultative.

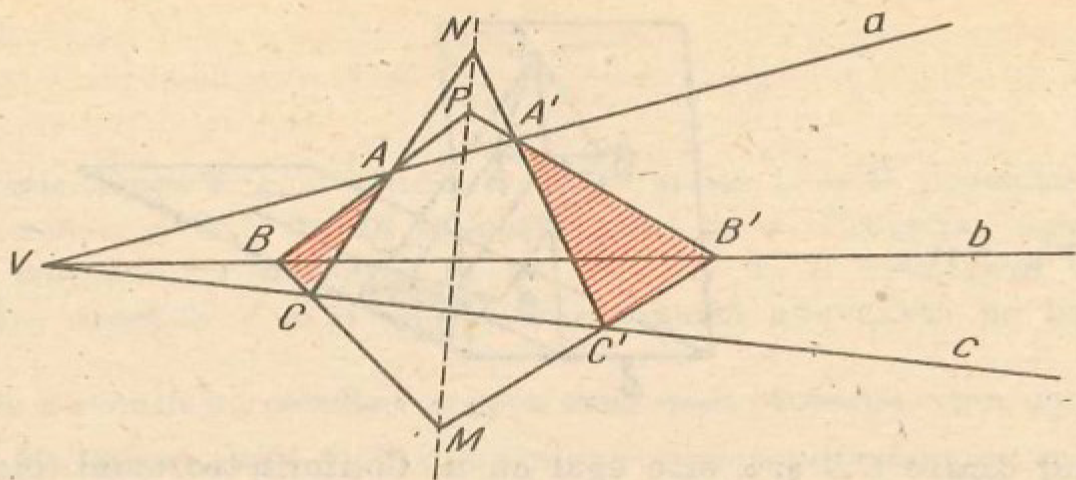


Fig. 9.13

Din ipoteză, dreptele AC şi $A'C'$ nu sînt paralele, deci, fiind coplanare, se întîlnesc. Fie N punctul lor de intersecţie.

La fel, AB şi $A'B'$ se întîlnesc în P, BC şi $B'C'$ în M. Dar punctele M, N, P, situate pe dreptele BC, CA, AB, aparţin planului triunghiului ABC; aceleaşi puncte M, N, P, fiind situate şi pe dreptele $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, aparţin şi planului triunghiului $A'B'C'$, deci sînt situate pe dreapta de intersecţie a planelor. Rezultă că M, N, P sînt coliniare.

Observaţii. **1.** Dacă două din laturile triunghiurilor de exemplu AC şi $A'C'$, sînt paralele şi restul enunţului rămîne acelaşi, se dovedeşte uşor că dreptele MP, $A'C'$ şi AC sînt paralele.

2. Dacă $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$ atunci şi $AB \parallel A'B'$ şi planul triunghiului ABC este paralel cu cel al triunghiului $A'B'C'$ (fig. 9.14).

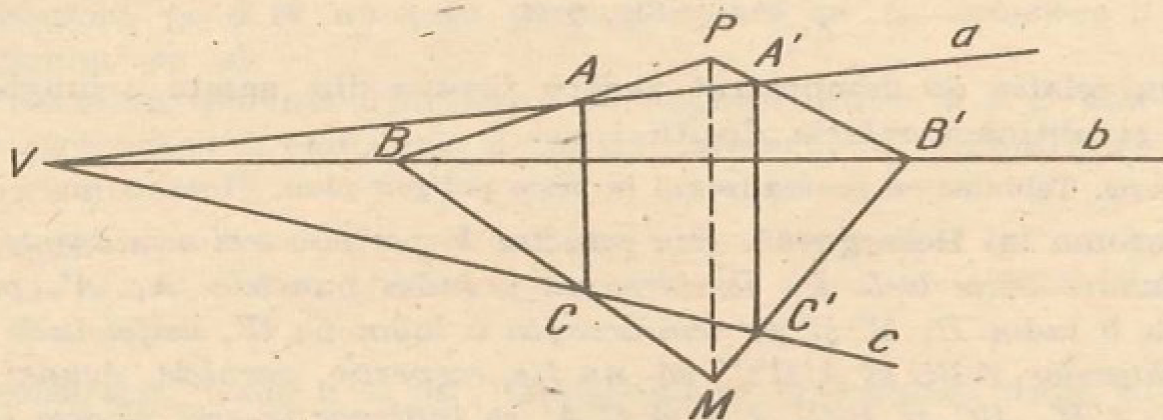


Fig. 9.14

Dacă vom conveni să spunem că două drepte paralele au un punct comun la infinit şi că două plane paralele au o dreaptă comună la infinit, în enunţul teoremei lui Desargues nu mai este nevoie de specificat că laturile triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ nu sînt respectiv paralele. Enunţul se simplifică, în schimb sensul său capătă un plus de încărcătură, prin generalizare.

Problemă rezolvată. Ne-am deprins, pînă acum, să folosim uneori geometria în plan pentru a rezolva probleme sau părţi din probleme de geometrie în spaţiu. „Metoda proiecţiei" ne dă posibilitatea să facem şi drumul invers: să rezolvăm probleme de geometrie plană cu ajutorul geometriei în spaţiu. Teorema lui Desargues este un exemplu clasic în această privinţă.

Se dau trei drepte în plan (de data aceasta) a, b, c concurente în V (fig. 9.15). Două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ au vîrfurile respectiv pe aceste drepte şi nu au laturile corespunzătoare paralele. Să dovedim atunci că acestea se întîlnesc în trei puncte coliniare M, N, P.

Fie α planul dreptelor a, b, c şi β un alt plan ($\beta \perp \alpha$), care trece prin V şi printr-o dreaptă a' ($V \in a'$) ce se proiectează în α după dreapta a (fig. 9.16). Fie $A_1 \in a'$, punctul care se proiectează în A pe α şi $A'_1 \in \alpha$, punctul care se proiectează în A' pe α

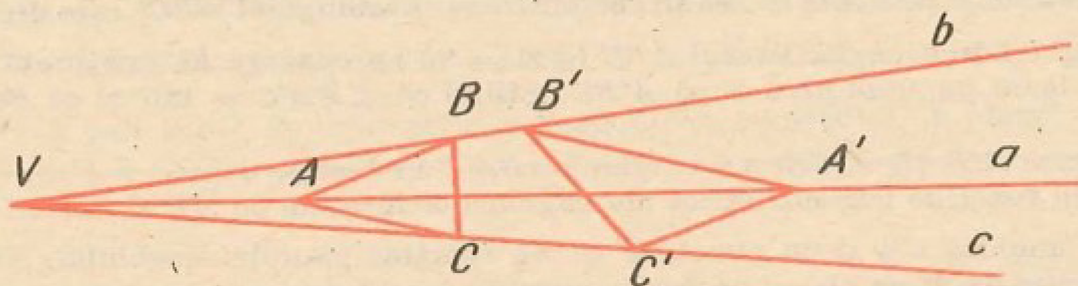


Fig. 9.15

Laturile triunghiurilor A_1BC şi $A'_1B'C'$, care îndeplinesc condiţiile teoremei lui Desargues în spaţiu, se intersectează în trei puncte coliniare M_1, N_1, P_1, care se vor proiecta în M, N, P pe planul α. Dar, proiecţia unei drepte fiind tot o dreaptă, rezultă că şi

Fig. 9.16

M, N, P sînt coliniare. Veți obiecta că proiecția unei drepte poate fi și un punct, dar acesta se întîmplă cînd dreapta este perpendiculară pe plan. În cazul nostru M_1N_1 este intersecția planelor A_1BC și A'_1BC, care ar trebui atunci să fie perpendiculare și ele pe α (deoarece conțin o dreaptă perpendiculară pe α). Dar atunci n-am mai avea în α un „triunghi“ ABC ci trei puncte pe un segment A, B, C.

PROBLEME 9

1. Un segment $AB = 10$ cm face cu planul α un unghi de: a) 45°; b) 30°; c) 60°. Aflați măsura proiecției segmentului AB pe planul α, în cele trei cazuri.

2. Triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) are cateta AB conținută în planul α. Proiecția punctului C pe α este C'. Să se demonstreze că triunghiul ABC' este dreptunghic.

3. Triunghiul dreptunghic isoscel ABC ($\sphericalangle A = 90°$) are latura BC conținută în planul α, și se proiectează pe acest plan după $A'BC$. Știind că $\sphericalangle BA'C = 120°$ și că $BC = a$, să se afle:

a) înălțimea $A'D$ ($D \in BC$) a triunghiului $BA'C$ în funcție de a;
b) una din funcțiile trigonometrice ale unghiurilor formate de AB și AC cu planul α.

4. Se dă unghiul xOy și un punct M ce nu aparține planului unghiului. Să se arate că, dacă proiecția lui M pe planul unghiului aparține bisectoarei acestuia, atunci punctul M este egal depărtat de laturile unghiului xOy.

5. Un trapez dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$) are baza :nare AB conținută în planul α. Știind că $AB = 5$ cm, $CD = 2$ cm, $BC = 6$ cm, și că planul trapezului formează cu α un unghi egal cu unghiul său ascuțit, se cere:

a) să se arate că patrulaterul $ABC'D'$, (C' D' — proiecțiile lui C și D pe α) este trapez dreptunghic;
b) să se calculeze dimensiunile trapezului $ABC'D'$.

6. Un segment AB se proiectează pe un plan α după $A'B'$. Știind că $A'B' = \frac{3}{5}AB$, să se calculeze tangenta unghiului format de segmentul AB cu α.

7. Un triunghi echilateral ABC cu latura de 6 cm se proiectează pe un plan α, ce conține punctul A, după $AB'C'$. Se știe că $\sphericalangle B'AC' = 90°$, AB și AC fac cu α unghiuri congruente, și că sînt de aceeași parte a lui α. Să se calculeze unghiul format de AB și AC cu α.

8. Două oblice, care pleacă din același punct exterior unui plan, au lungimile de 20 cm și 16 cm. Proiecția pe plan a primei oblice este de 15 cm. Să se afle lungimea proiecției celei de a doua oblice.

9. Triunghiul ABC se proiectează pe planul α, care conține pe BC, după triunghiul $A'BC$. Știind că: $\sphericalangle BA'C = 90°$, $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle BAC = 75°$ și că înălțimea AD a triunghiului ABC, ($D \in BC$) are lungimea a, să se calculeze:

a) segmentele BD și DC în funcție de a;
b) înălțimea corespunzătoare laturii BC a triunghiului $BA'C$;
c) cosinusurile unghiurilor formate de AB și AC cu planul α.

10. Un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), cu $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm se proiectează pe un plan α după $A'B'C'$. Știind că aria triunghiului $A'B'C'$ este de 12 cm², să se afle unghiul plan al diedrului format de α cu planul triunghiului.

11. Un trapez dreptunghic, cu bazele de 2 cm și $(2 + 3\sqrt{3})$ cm, are latura oblică de 6 cm. Se proiectează acest trapez pe un plan. Acest plan face cu planul trapezului un unghi cît unghiul ascuțit al trapezului. Să se afle aria proiecției trapezului.

12. Triunghiul ABC se îndoaie de-a lungul liniei mijlocii MN ($M \in AB$, $N \in AC$), astfel încît planul triunghiului AMN și cel al trapezului $MNCB$ să formeze un diedru drept.

a) Să se determine unghiul plan al diedrului format de planul trapezului $MNCB$ și cel determinat de punctele A, B, C.

b) Notînd cu S aria triunghiului inițial ABC, să se determine, în funcție de S, aria noului triunghi obținut după îndoire.

13. Un trapez isoscel are baza mică și laturile oblice egale fiecare cu $2a$, iar unghiurile ascuțite egale cu 60°. Să se calculeze aria proiecției acestui trapez pe un plan care face cu planul trapezului un unghi congruent cu unghiul ascuțit al diagonalelor.

14. Un trapez $ABCD$, cu baza mare AB, conținută în planul α, are raportul bazelor $\frac{CD}{AB} = \frac{5}{7}$. Știind că distanța de la punctul C la planul α este de 24 cm, să se afle distanța de la punctul O, de intersecție a diagonalelor trapezului, la planul α.

POLIEDRE PARTICULARE

TETRAEDRUL

Înţelegem prin poliedru o figură care, prin proprietăţile ei spaţiale, ne aminteşte proprietăţile poligonului, ca figură plană.

Vom începe prin a studia diferite poliedre particulare. Să menţionăm că paralelipipedul, de pildă (întîlnit în clasa a cincea), este un poliedru.

Poliedrul, analog triunghiului din plan, este tetraedrul.

Un tetraedru este definit prin patru puncte, numite vîrfuri, care trebuie să fie patru puncte necoplanare (la fel, în plan, triunghiul este definit prin cele trei vîrfuri ale sale, care trebuie să fie necoliniare).

Să unim cele patru puncte în toate modurile posibile (fig. 10. 1). Segmentele de dreaptă obţinute le numim muchiile tetraedrului. Triunghiurile care se formează şi interioarele lor alcătuiesc feţele tetraedrului. Reuniunea acestor feţe este suprafaţa tetraedrului.

Unind cu un segment două puncte de pe suprafaţa unui tetraedru, neaşezate pe aceeaşi faţă, orice punct din interiorul acestui segment se numeşte punct interior tetraedrului.

Reuniunea dintre suprafaţa tetraedrului şi interiorul său formează un corp numit tetraedrul. Uneori, vom considera în probleme drept tetraedru numai suprafaţa sa.

Suma ariilor feţelor tetraedrului o numim aria totală a tetraedrului. Dacă considerăm tetraedrul „aşezat" pe una din feţe, o vom numi pe aceasta bază, iar pe celelalte, feţe laterale.

Distanţa de la un vîrf (de pildă A) la faţa opusă lui ($\triangle DBC$), (fig. 10.1), se numeşte înălţimea tetraedrului (h_a din fig. 10.1). Luată astfel, înălţimea este un număr. În unele probleme o vom considera şi ca segment cu un capăt în vîrf şi cu celălalt capăt în planul feţei ce nu trece prin vîrful respectiv. Un tetraedru are patru înălţimi.

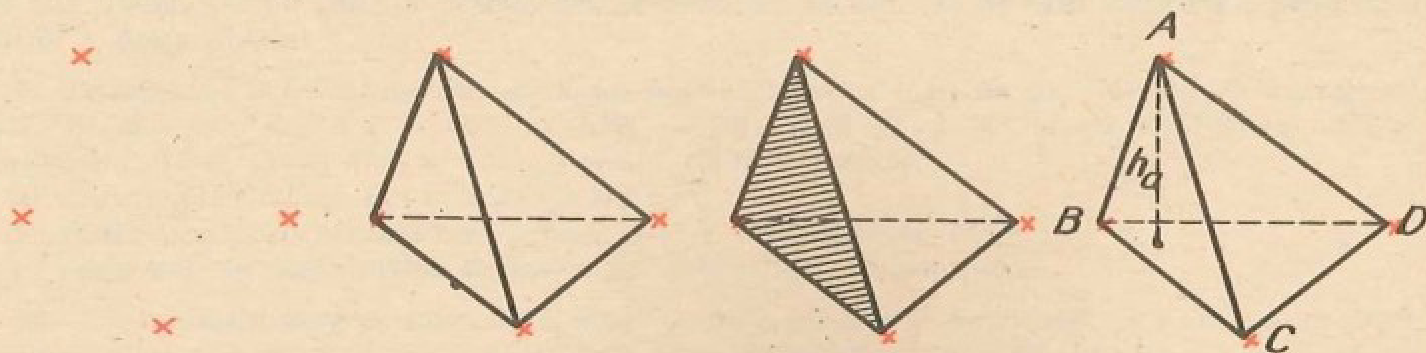


Fig. 10.1

Despre volum. Obiectele din jurul nostru ocupă „loc" mai mare sau mai mic. Un dulap de bucătărie, de pildă, dacă este „mai mare" lasă „mai puţin loc" de trecere în jurul său, deci el ocupă „mai mult loc" din „cantitatea de loc" a camerei. Bineînţeles că forţăm puţin modul de exprimare pentru a vorbi de lucruri cunoscute. Sîntem conduşi în mod firesc să comparăm, într-un fel oarecare, cît loc ocupă un obiect, cu cît loc ocupă alt obiect, din spaţiul înconjurător. Apare ideea de a asocia fiecărui corp din spaţiu cîte un număr, pe care îl vom numi volumul său, care să ne permită să facem astfel de comparaţii.

Volumul tetraedrului este un număr egal cu o treime din produsul dintre aria unei feţe şi înălţimea care este perpendiculară pe ea.

Această definiţie necesită precizări. În primul rînd trebuie arătat că acest număr este acelaşi, oricare ar fi alegerea feţei tetraedrului, considerată ca bază, şi a înălţimii corespunzătoare ei.

Pentru aceasta, ducem înălţimile feţelor ABC şi DBC ($AM = a_2$, $DN = a_1$) şi înălţimile tetraedrului $AQ = h_1$, $DP = h_2$ (fig. 10.2).

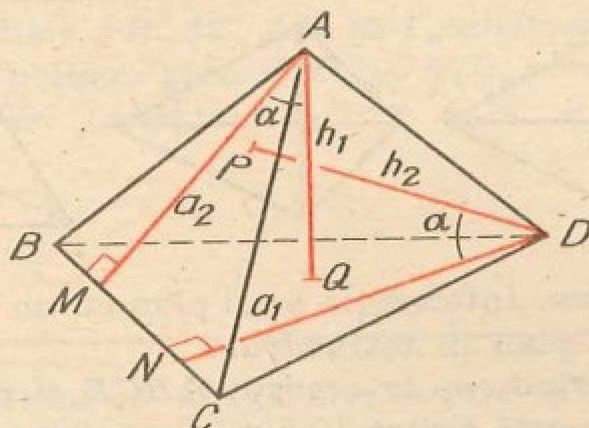


Fig. 10.2

Să demonstrăm egalitatea produselor a_1h_1 şi a_2h_2. Pentru aceasta vom constata congruenţa unghiurilor QAM şi PDN. Dreptele MQ şi ND sînt perpendiculare pe BC (DN fiind înălţime şi MQ din una dintre reciprocele teoremei celor trei perpendiculare). Deci $MQ \parallel ND$. La fel, $MA \parallel PN$. Înseamnă că $\sphericalangle AMQ \equiv \sphericalangle PND$. Rezultă că şi complementele lor sînt congruente ($\sphericalangle MAQ \equiv \sphericalangle NDP$), ($\sphericalangle MAQ = \alpha$). Exprimăm, în două moduri, cosinusul unghiului α: $\cos \alpha = \frac{h_1}{a_2} = \frac{h_2}{a_1}$ şi, egalînd produsul mezilor cu al extremilor, obţinem egalitatea căutată.

Vom nota cu S_{BCD} şi S_{BCA} ariile feţelor BCD, respectiv BCA. Să dovedim că $\frac{S_{BCD} \cdot h_1}{3} = \frac{S_{BCA} \cdot h_2}{3} \Leftrightarrow \frac{BC \cdot a_2h_2}{6} = \frac{BC \cdot a_1h_1}{6} \Leftrightarrow a_1h_1 = a_2h_2$, relaţie demonstrată. Dar, într-un tetraedru, oricare două feţe au o latură comună, deci oricare ar fi faţa aleasă cu înălţimea corespunzătoare, produsul lor este acelaşi.

Dacă se dă un tetraedru $ABCD$ şi prin dreapta AD se duce un plan care taie muchia BC într-un punct interior M, este evident că suma volumelor tetraedrelor $ABMD$ şi $ACMD$ este egală cu volumul tetraedrului $ABCD$, pentru că suma ariilor $\triangle BMD$ şi $\triangle MCD$ este aria $\triangle BCD$, iar înălţimea corespunzătoare acestor feţe este aceeaşi (fig. 10.3).

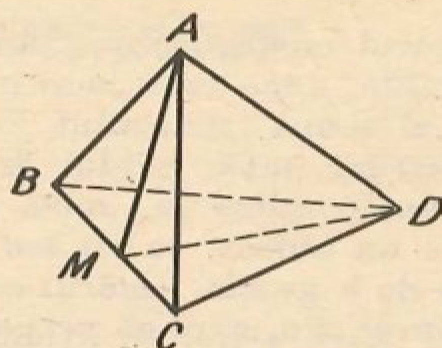
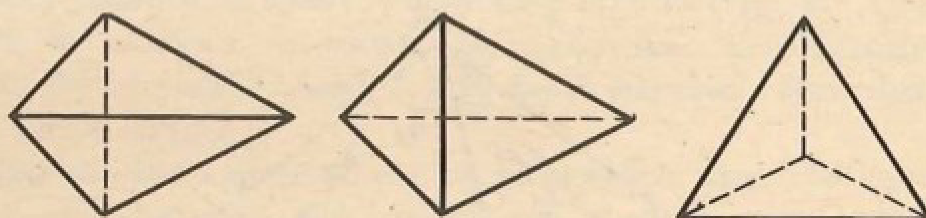


Fig. 10.3

Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numește *tetraedru regulat*.

Cînd desenăm un tetraedru, avem grijă, în general, să figurăm muchiile care nu se văd, punctat. Exemple în fig. 10.4:


Fig. 10.4

Secțiuni într-un tetraedru. Intersecția unui plan cu un tetraedru se numește secțiunea determinată de plan în tetraedru.

O problemă de desen. Dîndu-se tetraedrul $ABCD$ și punctele M, N, P pe muchiile sale, așa cum ne arată figura 10.5, să desenăm secțiunea determinată în tetraedru de planul ce trece prin M, N, P.

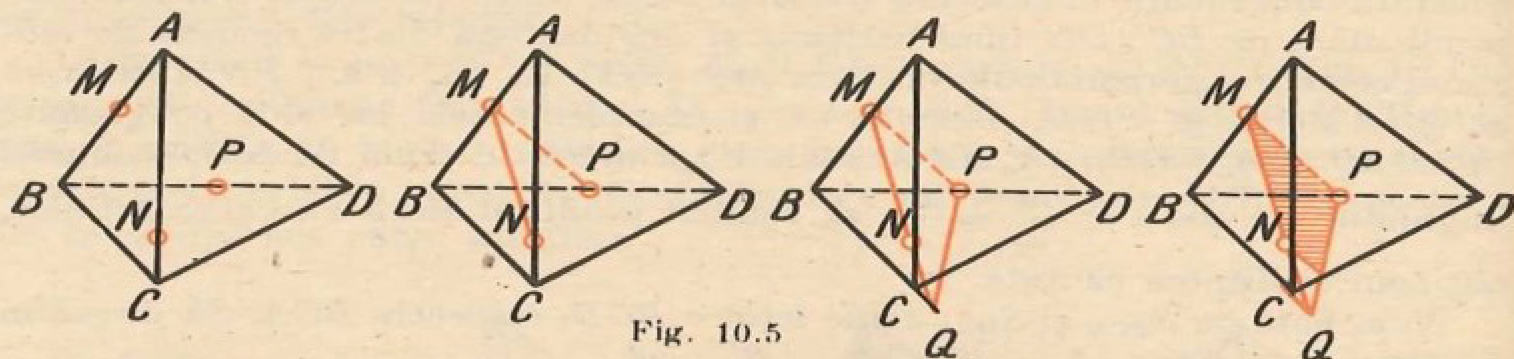


Fig. 10.5

Observăm că segmentul MN este conținut în fața ABC, la fel $MP \subset \subset (ABD)$. Le figurăm, unind M cu N și M cu P. Dreapta MN are comun cu dreapta BC punctul Q, care, fiind pe BC, aparține și planului (BCD), la fel ca și punctul P, deci dreapta PQ este conținută în planul (BCD). Dreapta PQ intersectează pe CD în T. Segmentul TP este o latură a secțiunii. Punctele N și T sînt pe aceeași față, deci secțiunea este poligonul $NMPT$ cu interiorul său.

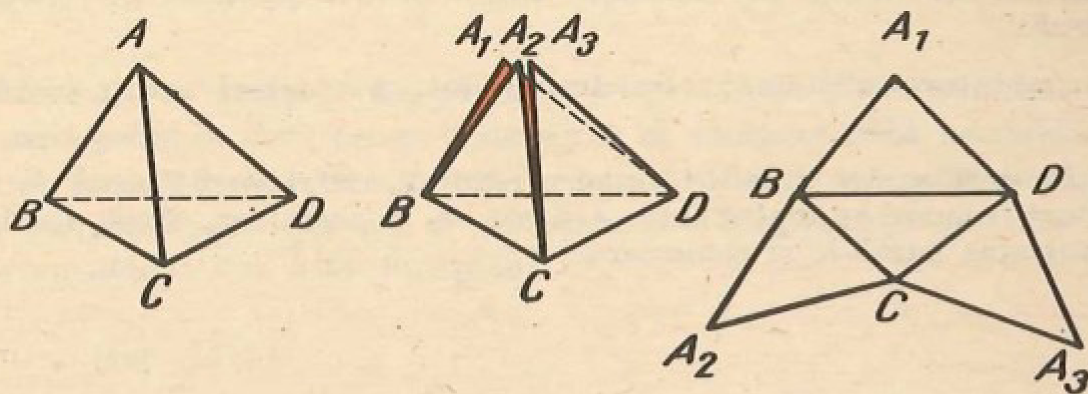


Fig. 10.6

Desfăşurarea unui tetraedru. Presupunem, prin concretizare, un tetraedru din carton (tetraedru-suprafaţă deci, nu tetraedru-corp). „Tăindu-l", de exemplu de-alungul muchiilor AB, AC, AD, să-i „rabatem" feţele, fără a le deforma, pînă se ajunge la un poligon plan $A_1BA_2CA_3D$, care reprezintă o desfăşurare a tetraedrului $ABCD$. (Atenţie $A_1B \equiv A_2B$, $A_2C \equiv CA_3$, $A_2D \equiv DA_1$) (fig. 10.6).

PROBLEME 10

---

1. Un tetraedru are baza un triunghi dreptunghic, cu ipotenuza de 10 cm şi o catetă de 8 cm. Înălţimea tetraedrului este de 10 cm. Care este volumul său?

2. Tetraedrul $VABC$ are faţa ABC un triunghi echilateral cu latura $8\sqrt{3}$ cm, ştiind că distanţa lui V la planul (ABC) este 10 cm, să se afle volumul tetraedrului.

3. Un triunghi dreptunghic ABC are catetele $AB = 3$ m şi $AC = 4$ m. În A se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului, pe care se ia un segment $AV = 2{,}4$ m. Să se afle:
a) volumul tetraedrului $VABC$;
b) aria totală a tetraedrului $VABC$;
c) unghiul plan al diedrului format de faţa VBC şi planul triunghiului ABC.

4. Tetraedrul $VABC$ are faţa ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$), iar piciorul perpendicularei din V pe planul (ABC) este punctul A. Ştiind că: $AB = AC = 5$ m, $BC = 6$ cm şi $AV = 3$ m, să se calculeze aria totală şi volumul tetraedrului.

5. Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ia punctul M, astfel încît $MB = 20$ cm, $MC = 5\sqrt{17}$ cm şi $MD = 13$ cm. Se cere:
a) să se demonstreze că triunghiurile MBC şi MDC sînt dreptunghice;
b) să se calculeze volumul tetraedrului $MABC$.

6. Tetraedrul $VABC$ are faţa ABC un triunghi echilateral, iar distanţa lui V la planul ABC este de 8 cm. Ştiind că raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R = 4\sqrt{3}$ cm, să se afle volumul tetraedrului.

7. Intersectînd un tetraedru regulat cu un plan ce trece prin mijloacele a trei muchii ce pornesc din același vîrf, să se determine forma și aria secțiunii în funcție de latura „a" a tetraedrului.

8. Cunoscînd latura „a" a unui tetraedru regulat, să se calculeze aria totală și volumul tetraedrului.

9*. Găsiți o desfășurare a unui tetraedru regulat, astfel încît fiecare față să aibă cel mult două laturi comune cu o altă față. Arătați că, în acest caz, două din laturile poligonului obținut sînt paralele și congruente.

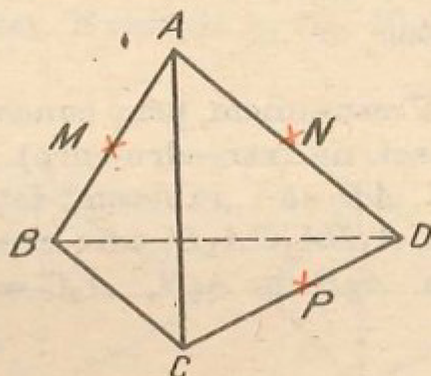


Fig. 10.7

10. În figura 10.7 punctele M, N, sînt mijloacele muchiilor AB și AD, iar P un punct interior muchiei CD. Să se determine natura secțiunii determinate în tetraedru, de planul ce trece prin M, N, P și să se deseneze această secțiune.

11. Fie $ABCD$ un tetraedru și A', B', C', D', centrele de greutate ale fețelor opuse vîrfurilor A, B, C, D. Să se arate că AA', BB', CC' și DD' sînt concurente într-un punct G.

12*. Un triunghi ascuțitunghic „se îndoaie" de-a lungul liniilor mijlocii pînă se obține un tetraedru. Să se arate că o înălțime a tetraedrului obținut cade în ortocentrul triunghiului inițial.

13. Să se arate că perpendicularele în centrele cercurilor circumscrise fețelor unui tetraedru sînt concurente.

14. Dacă într-un tetraedru cu toate fețele triunghiuri dreptunghice se întîlnesc într-un vîrf două unghiuri drepte, atunci mai există un vîrf al tetraedrului, în care se întîlnesc două unghiuri drepte.

15. Fie $OABC$ un tetraedru astfel încît $OA \perp OB \perp OC \perp OA$. Să se arate că pătratul ariei feței ABC este egal cu suma pătratelor ariilor fețelor OAB, OAC, OBC.

16. Fie $ABCD$ un tetraedru în care $AB \perp CD$. Să se arate că piciorul perpendicularei din A pe planul BCD cade pe înălțimea din B a triunghiului BCD. Dacă, în plus, $AC \perp BD$, atunci $AD \perp BC$ și înălțimile tetraedrului sînt concurente.

PRISMA

Să considerăm, în spaţiu, un poligon — presupus plan pentru a simplifica lucrurile, numit *poligon director*-şi o dreaptă *d*, care nu este paralelă cu planul poligonului. O dreaptă care se „mişcă", sprijinindu-se pe poligonul director şi rămîne, tot timpul, paralelă cu *d*, generează o suprafaţă pe care o numim suprafaţă prismatică. Cu alte cuvinte: *Locul geometric al punctelor dreptelor paralele cu d, care au un punct comun cu poligonul director, se numeşte suprafaţă prismatică* (fig. 11.1).

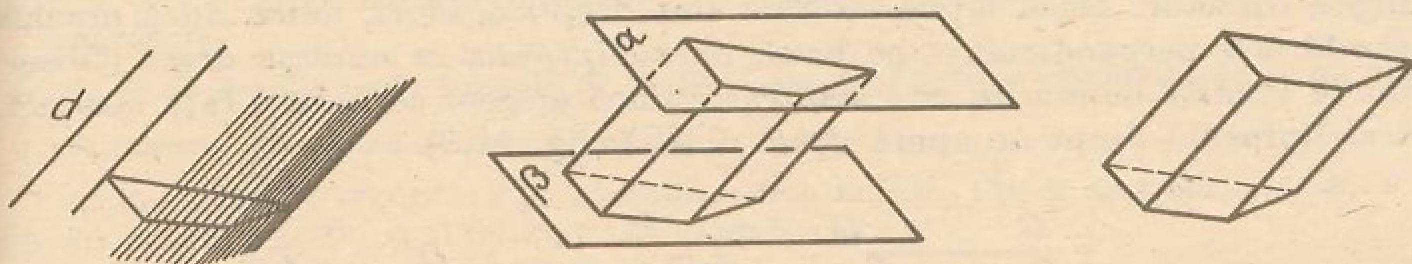


Fig. 11.1

Intersectînd această suprafaţă cu două plane paralele (α şi β), se obţin, în aceste plane, două poligoane cu laturile respectiv paralele şi concurente, şi, în zona dintre cele două plane, un număr de paralelograme egal cu cel al laturilor poligonului director. Poligoanele din planele paralele, împreună cu interioarele lor, se numesc baze, paralelogramele, cu interioarele lor, de pe suprafaţa prismatică, feţe laterale. Reuniunea feţelor laterale cu bazele formează *suprafaţa prismei*. Suma ariilor feţelor laterale se numeşte *aria laterală a prismei*. Suma dintre aria laterală şi ariile bazelor se numeşte *aria totală a prismei*.

Un punct interior segmentului care uneşte două puncte de pe feţe diferite şi care nu se găsesc pe aceeaşi muchie, se numeşte punct interior prismei. *Mulţimea punctelor interioare reunită cu suprafaţa prismei alcătuiesc corpul numit prismă.*

Uneori, ca să nu mai lungim exprimarea, vom numi prismă numai suprafaţa sa.

Dacă muchiile laterale sînt perpendiculare pe planele bazelor, atunci *prisma se numeşte dreaptă*, iar feţele ei laterale sînt dreptunghiuri.

La o prismă *distanţa dintre baze se numeşte înălţime*. (Reamintim că distanţa dintre două plane este lungimea segmentului de dreaptă determinat de plane pe perpendiculara comună.)

La prisma dreaptă înălţimea este cît muchia laterală.

Prismele se deosebesc, ca denumire, după numărul laturilor poligonului de bază (de exemplu, în fig. 11.2 prismă triunghiulară, prismă patrulateră, prismă pentagonală).

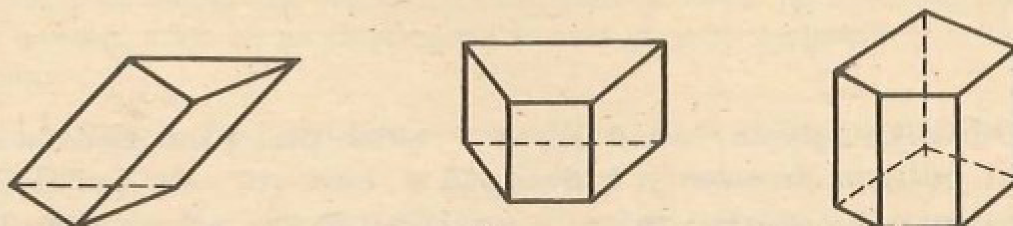


Fig. 11.2

Paralelipipedul este o prismă cu bazele paralelograme, deci are toate feţele paralelograme. El poate fi considerat prismă în trei „moduri" diferite. Oricare din paralelogramele care determină feţele paralelipipedului poate fi considerat poligon director. Dacă feţele laterale sînt dreptunghiuri, adică dacă muchia laterală este perpendiculară pe bază, *paralelipipedul se numeşte drept*. (Observăm că această denumire este arbitrară: dacă alegem ca bază o faţă laterală, paralelipipedul drept ne apare acum oblic.) (fig. 11.3).

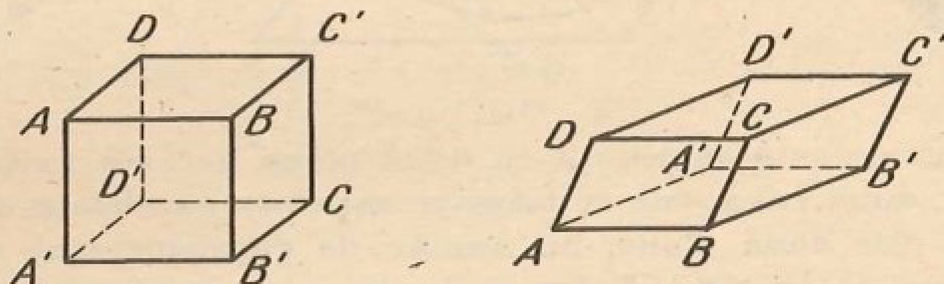


Fig. 11.3

Un paralelipiped cu toate feţele dreptunghiuri *se numeşte dreptunghic*. Vom spune deci că un paralelipiped dreptunghic este o prismă dreaptă în trei moduri diferite, iar un paralelipiped drept este o prismă dreaptă numai într-un singur mod. Evident orice paralelipiped dreptunghic este drept, nu însă orice paralelipiped drept este dreptunghic.

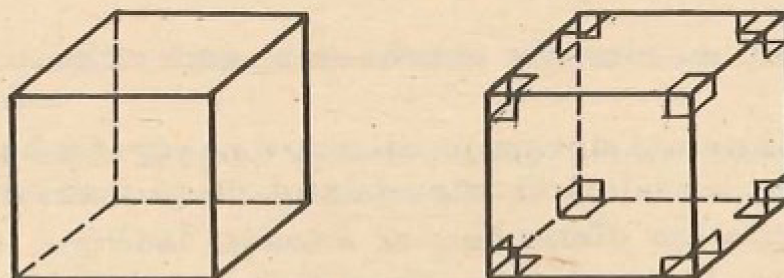


Fig. 11.4

Observaţie: Ultima propoziţie pare mai simplu de înţeles decît de desenat, pentru că bazele, din cauza perspectivei, ne apar şi la cel drept şi la cel dreptunghic tot paralelograme, care nu sînt dreptunghiuri (fig. 11.4). În figură, ca să evităm confuzia, am marcat şi pe bază unghiurile drepte.

1. O prismă exagonală regulată dreaptă are toate muchiile de 2 cm (şi muchiile de la bază şi muchiile laterale). Să i se calculeze aria laterală.

2. Pe muchiile AA', BB' şi CC' ale unei prisme triunghiulare $ABCA'B'C'$, alegem punctele M, N, P.

a) Să se arate că dacă G este punctul de întîlnire al medianelor triunghiului ABC, iar S cel al medianelor triunghiului MNP, atunci $GS \parallel AA'$.

b) Cunoscînd că $AM = 6$ cm, $BN = 8$ cm, $CP = 10$ cm, să se calculeze GS.

c) Să se rezolve problema în cazul $AM = a$, $BN = b$, $CP = c$.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped. Să se arate că mijloacele muchiilor AA', $A'B'$, $B'C'$, $C'C$, CD şi DA sînt coplanare şi formează un hexagon cu laturile opuse paralele şi congruente.

4. Să se descrie toate tipurile de secţiuni ale unei prisme triunghiulare cu un plan.

5. Aceeaşi problemă pentru o prismă patrulateră.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Fie N mijlocul lui AB, P al lui BC, M al lui $A'D'$, R al lui $D'C'$. Să se arate că:

a) MR şi NP sînt congruente şi paralele;

b) MN şi RP sînt paralele.

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped. Prin punctul O de intersecţie a dreptelor AC' şi $A'C$ ducem un plan oarecare α. Să se demonstreze că suma distanţelor vîrfurilor unei baze la planul α este egală cu suma distanţelor vîrfurilor celeilalte baze la α.

Diagonala paralelipipedului dreptunghic este segmentul de dreaptă care uneşte două vîrfuri, care nu sînt pe aceeaşi faţă (de exemplu $A'D$ din figura 12.1). Într-un paralelipiped există patru diagonale. Presupunem, în această figură, că dimensiunile paralelipipedului sînt a, b, c, şi diagonala $A'D = d$. Să demonstrăm că:

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2},$$

formulă utilă pentru calculul diagonalei şi care este teorema lui Pitagora în spaţiu (fig. 12.1).

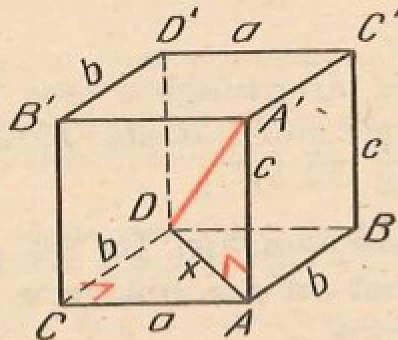


Fig. 12.1

În triunghiul dreptunghic ABD ($\sphericalangle B = 90°$): $x^2 = a^2 + b^2$, ($x = AD$).

În triunghiul dreptunghic $AA'D$ ($\sphericalangle A'AD = 90°$) : $d^2 = c^2 + x^2 = c^2 + a^2 + b^2$, şi relaţia este demonstrată.

O problemă de secţiune. Se dă cubul din figura 12.2 cu notaţiile ei, unde: $M \in DD'$, $N \in C'C$, $P \in AB$. Să se deseneze secţiunea determinată de MNP în cub.

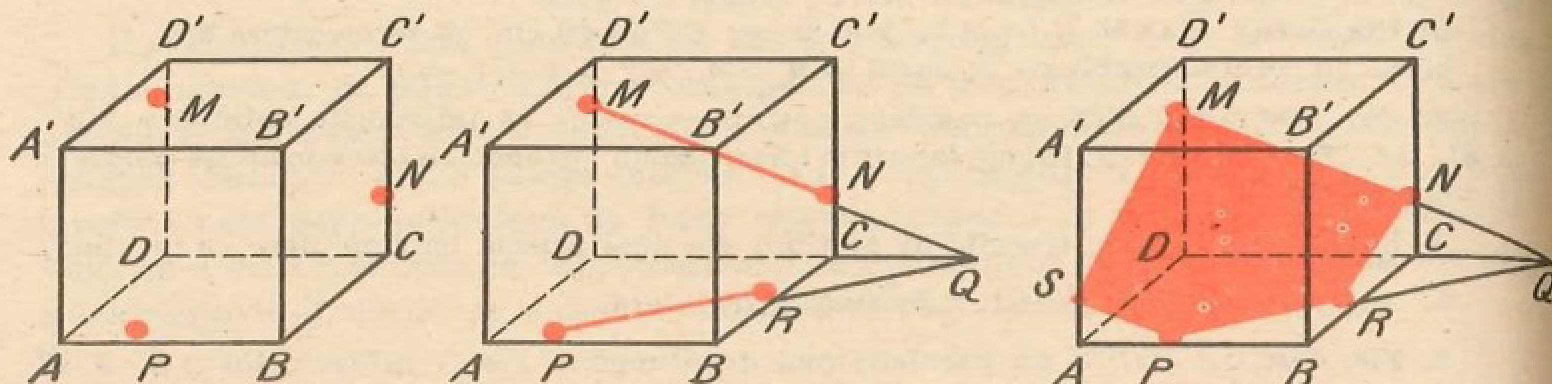


Fig. 12.2

Unim M cu N (fiind pe aceeaşi faţă), prelungim dreapta lor pînă taie pe DC în Q, care aparţine deci planului ($C'CD$). Unim Q cu P. Notăm $R = CB \cap PQ$. Am obţinut segmentul NR al secţiunii. Ducem, pe faţa $AA'D'D$, $MS \parallel NR$, ($S \in A'A$). Unim S cu P. Secţiunea căutată este $PRNMS$.

După cum îi alegem baza, sîntem obişnuiţi, la un paralelipiped dreptunghic, să numim muchiile de mărimi diferite: lungime, lăţime şi înălţime; lungimea şi lăţimea sînt laturile bazei, în această ordine (lungimea este mai mare decît lăţimea). Numim uneori lungimea, lăţimea şi înălţimea, „cele trei dimensiuni ale paralelipipedului". Dacă le notăm cu a, b, c, aria totală a paralelipipedului dreptunghic va fi:

$\mathcal{A}_t = 2(ab + bc + ca)$ (fig. 12.3) a = lungime, b = lăţime, c = înălţime.

Fig. 12.3

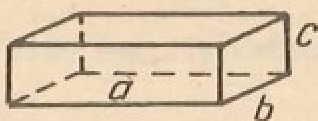
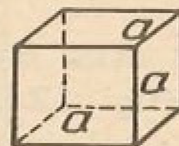


Fig. 12.4



Un caz particular de paralelipiped dreptunghic este *cubul*, care are toate muchiile congruente, deci toate feţele sînt pătrate. Notînd lungimea muchiei lui cu a, aria sa totală va fi $6a^2$ (fig. 12.4).

Desfăşurarea paralelipipedului dreptunghic. La fel ca la tetraedru, prin „tăiere de-a-lungul muchiilor şi rabatare", se obţine un poligon plan. Considerăm figura 12.5 destul de elocventă...

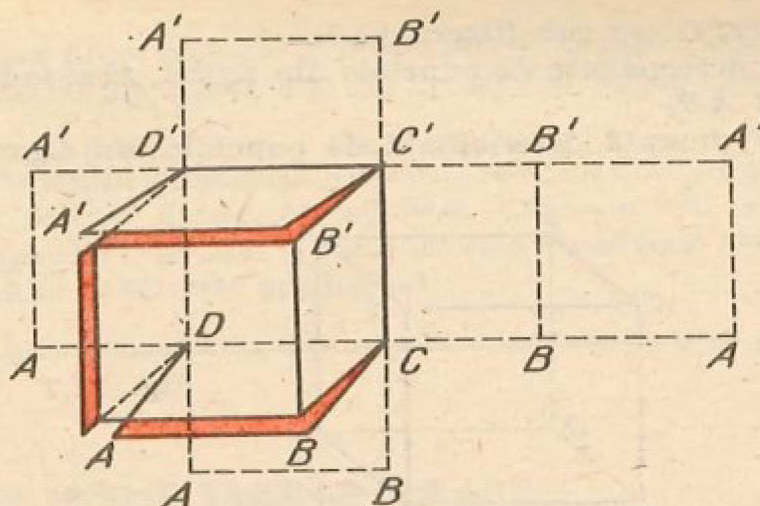
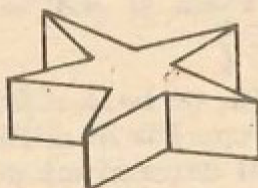


Fig. 12.5

Mai există şi alte moduri de desfăşurare a unui paralelipiped. Găsiţi şi voi un exemplu.

Observaţie. Numim prismă concavă, o prismă cu poligoanele de bază concave*; constatăm că există şi prisme concave nedesfăşurabile (fig. 12,6).

Fig. 12.6



PROBLEME 12

---

1. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm şi $AA' = 12$ cm. Să se calculeze:

a) lungimea diagonalei sale;

b) distanţa de la punctul C la dreapta AC'.

2. Un paralelipiped drept $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ un romb cu latura de 8 cm şi unghiul A de 120°. Ştiind că muchia laterală a paralelipipedului este de 6 cm, să se calculeze:

a) aria laterală a paralelipipedului;

b) lungimea segmentelor $A'C$ şi BD'.

3. Un cub are muchia a. Să se afle distanţele de la vîrfurile sale la o diagonală.

4. Un paralelipiped drept are laturile bazei de 6 cm şi 10 cm şi unghiul dintre ele de 60°, ştiind că înălţimea paralelipipedului este de 12 cm, să se afle aria sa totală.

---

* În general, o mulţime de puncte o numim convexă, dacă unind cu un segment oricare două puncte ale ei, interiorul acestuia este conţinut, în întregime, în această mulţime. Se arată că în cadrul poligoanelor plane acest fapt revine la a spune că poligonul se găseşte în întregime de aceeaşi parte a dreptei-suport a oricărei laturi.

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub (figura 12.7).

a) Dintre planele determinate de punctele din figură, să se indice unul care este perpendicular pe muchia AB.

b) Să se indice o dreaptă determinată de punctele din figură, perpendiculară pe dreapta AC'.

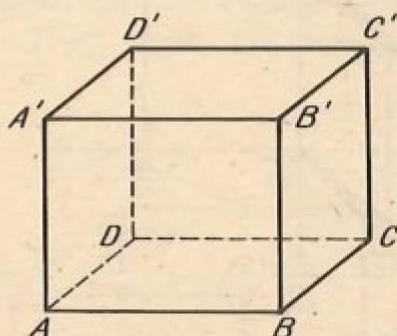


Fig. 12.7

6. Să se demonstreze că într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ perpendiculara din D pe diagonala AC' o taie pe aceasta într-un punct Q, astfel încît $\frac{AQ}{AC'} = \frac{1}{3}$.

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 9$ cm, $AD = 15$ cm și $AA' = 20$ cm. Se cere distanța lui B' la diagonala AD'.

8. Un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ un pătrat. Muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri de 30°, iar planele $AA'B'$ și $DD'C'$ sînt perpendiculare pe planul bazei. Cunoscînd că $AB = 4$ cm și $AA' = 6$ cm, să se calculeze aria totală a paralelipipedului.

9. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă, cu baza ABC un triunghi dreptunghic în A, cu $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm și $AA' = 30$ cm. Fie M mijlocul lui CC'. Să se determine forma și perimetrul secțiunii prismei cu planul determinat de punctele A', M, B.

10. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu baza $ABCD$ un pătrat, înălțimea este de 3 cm, iar dreptunghiul $ABB'A'$ are aria de 21 cm². Să se afle dimensiunile paralelipipedului.

11. Se dă un paralelipiped drept cu baza un romb, în care se cunosc: înălțimea h, latura a a rombului, precum și un unghi ascuțit θ, al rombului. Să se calculeze, în funcție de a, h, θ, diagonalele paralelipipedului.

12. Să se determine, în cuburile din figura 12.8, secțiunile determinate de planele ce trec prin punctele M, N, P.

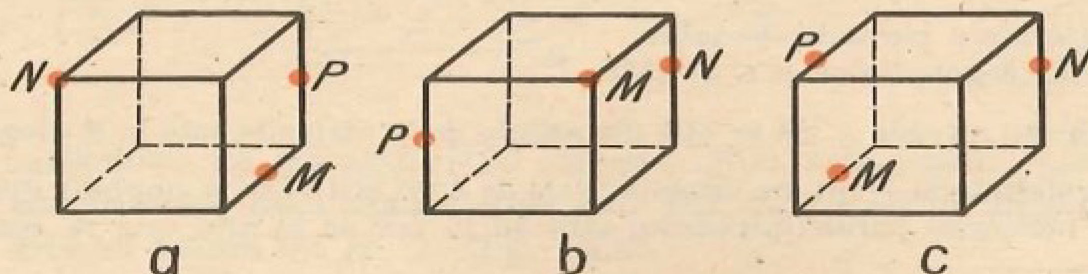


Fig. 12.8

(Figurile se vor copia întocmai pe caiet.)

13. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporţionale cu numerele 2, 3, 5. Ştiind că diagonala paralelipipedului este de $2\sqrt{38}$ cm, să se afle dimensiunile paralelipipedului.

14. Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC, ($AB \equiv AC$ şi $AB = a$), ducem perpendiculara $AA' = a$. Din A' ducem un segment $A'D = a\sqrt{2}$, perpendicular pe AA'. Dacă BD este perpendiculară pe AB şi dacă D este de aceeaşi parte a planului $AA'B$ ca şi C, atunci triunghiul DBC este echilateral.

VOLUMUL UNEI PRISME TRIUNGHIULARE

Înainte de a-l defini, vom face următoarea constatare:

Două tetraedre, avînd două feţe respectiv congruente şi înălţimile corespunzătoare congruente, au volume egale (fig. 13.1).

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BCD \equiv \triangle B'C'D' \Rightarrow \mathcal{A}_{BCD} = \mathcal{A}_{B'C'D'} \\ h = h' \\ \mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{\mathcal{A}_{BCD} \cdot h}{3} \\ \mathcal{V}_{A'B'C'D'} = \dfrac{\mathcal{A}_{B'C'D'} \cdot h'}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}_{ABCD} = \mathcal{V}_{A'B'C'D'}$$

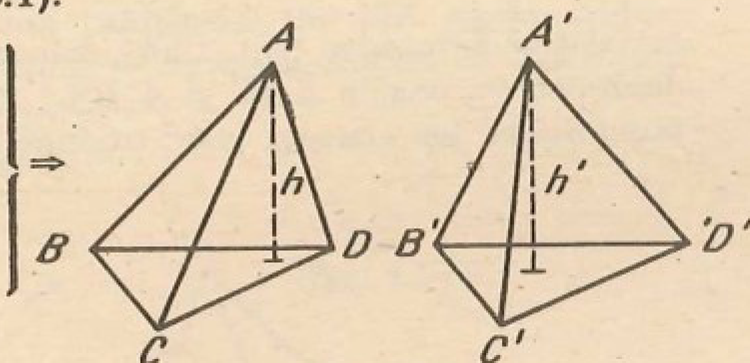


Fig. 13.1

Să demonstrăm următoarea:

Lemă. *O prismă triunghiulară se poate descompune în trei tetraedre echivalente (cu acelaşi volum).*

Considerăm prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$, şi prin punctele C, A', B' ducem o secţiune plană. Vom obţine astfel două corpuri: tetraedrul $CA'B'C'$ şi corpul $ABCA'B'$ (fig. 13.2). Vom nota tetraedrul cu P_1. Ne vom ocupa,

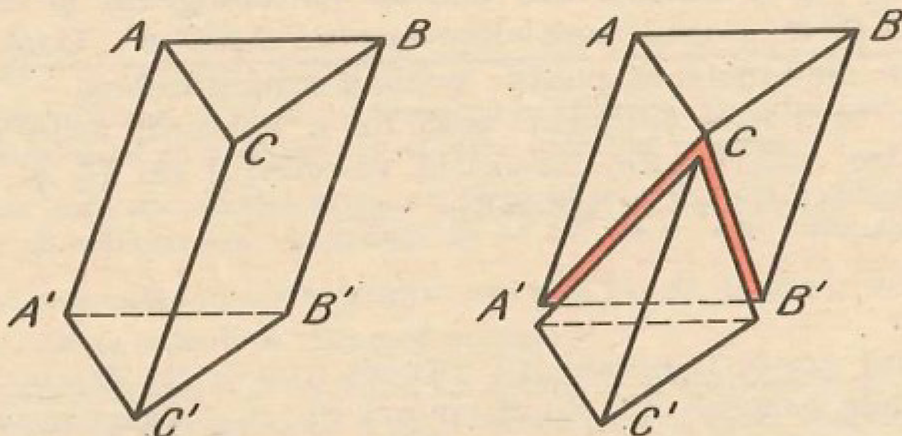


Fig. 13.2

acum, de cel de-al doilea corp. Secționînd corpul $ABCA'B'$ cu planul determinat de punctele A', C, B, vom nota cele două tetraedre obținute (fig. 13.3) cu P_2 și cu P_3 (tetraedrul $ACBA'$ este P_2 și $A'B'BC$ este P_3). Am obținut

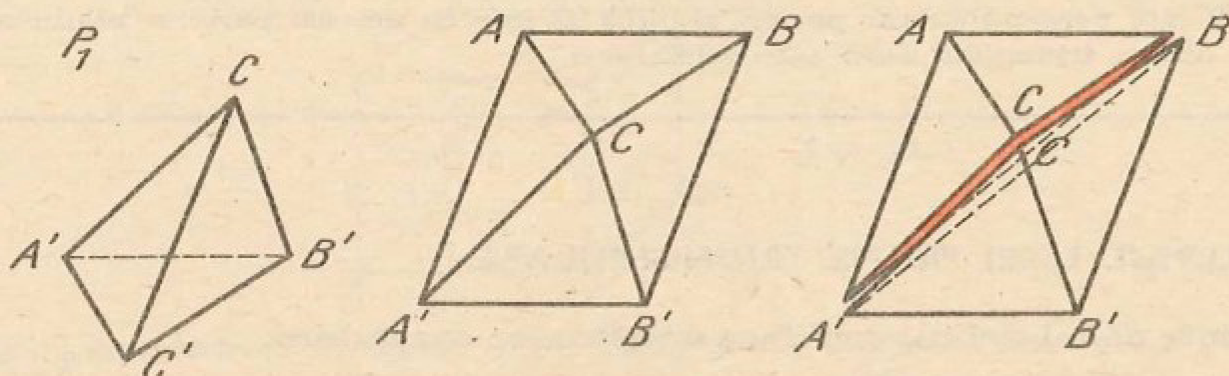


Fig. 13.3

astfel trei tetraedre (fig. 13.4). Ele sînt echivalente două cîte două: $P_1 \approx P_2$ deoarece au bazele ABC și $A'B'C'$ triunghiuri congruente și înălțimea corespunzătoare lor aceeași (este în fond înălțimea prismei, adică distanța dintre

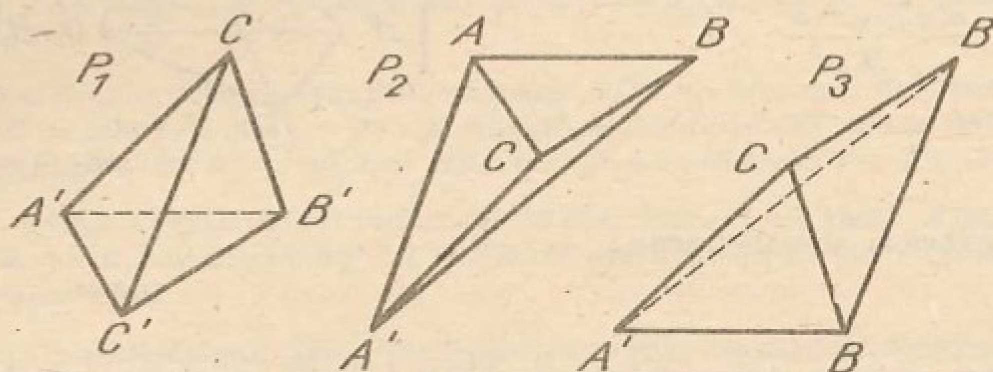


Fig. 13.4

planele bazelor ei). $P_2 \approx P_3$ pentru că au două baze respectiv congruente ABA' și $BA'B'$ ca jumătăți din același paralelogram și aceeași înălțime: distanța de la C la planul paralelogramului $ABB'A'$. Deci, $P_1 \approx P_2 \approx P_3$ și teorema este demonstrată pentru prisma triunghiulară.

Acesta nu este însă singurul mod de a împărți, de a secționa prisma în trei tetraedre echivalente. Expresia volumului lui P_1 și egalitatea celor trei volume ne conduce să afirmăm că:

Volumul unei prisme triunghiulare este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțime.

Orice prismă poate fi împărțită într-un număr de prisme triunghiulare: ducem în planele bazelor, din două vîrfuri de pe aceeași muchie laterală (de pildă A, A'), toate diagonalele bazelor. Cu secțiunile pe care le determină două

astfel de diagonale paralele (fig. 13.5), (de exemplu AC şi $A'C'$) separăm, tăiem prisma în mai multe prisme triunghiulare ($n - 2$, dacă n este numărul laturilor poligonului de bază). Volumul prismei mari este suma volu-

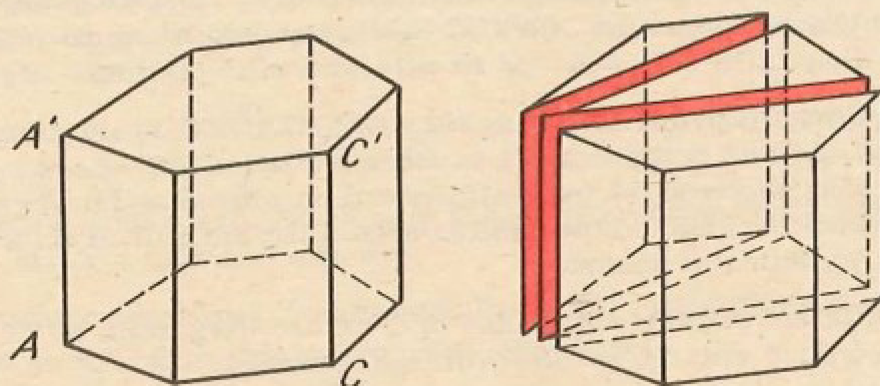
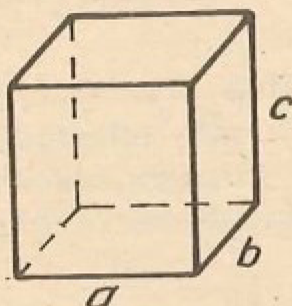


Fig. 13.5

melor acestor prisme triunghiulare, şi cum înălţimile lor sînt egale, putem spune că: *Volumul unei prisme este egal cu aria bazei înmulţită cu înălţimea.*

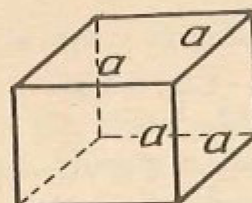
$$\mathcal{V}_{pr} = \mathcal{A}_{bazei} \cdot h.$$

Volumul paralelipipedului dreptunghic este deci egal cu produsul dimensiunilor sale (fig. 13.6), **iar al cubului cu muchia la cub** (fig. 13.7).



$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$

Fig. 13.6



$\mathcal{V} = a^3$

Fig. 13.7

PROBLEME 18

1. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Ştiind că aria laterală a prismei este de 288 cm², să se afle volumul prismei.

2. O prismă are baza un paralelogram cu dimensiunile 6 cm şi 8 cm şi unghiul ascuţit egal cu 60°. Ştiind că înălţimea prismei este de 10 cm, să se afle volumul prismei.

3. O prismă hexagonală regulată dreaptă are aria totală de $224\sqrt{3}$ m² şi cea laterală de $200\sqrt{3}$ m². Să se calculeze volumul prismei.

4. O prismă triunghiulară are ca bază un triunghi dreptunghic cu catetele de 5 m şi 12 m. Muchiile laterale sînt egale cu 6 m şi fac cu planul bazei unghiuri de 45°. Să se afle volumul prismei.

5.* O prismă dreaptă are ca bază un pătrat de latură a. Ştiind că diagonala prismei formează cu o faţă laterală ce porneşte din acelaşi vîrf un unghi de 30°, să se afle volumul prismei.

6. Baza unei prisme oblice este patrulaterul $ABCD$ în care diagonalele sînt perpendiculare între ele. Secţiunea diagonală $AA'C'C$ este perpendiculară pe planul bazei şi are aria egală cu a^2, iar diagonala $BD = b$. Să se afle volumul prismei.

7. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm şi $AA' = 3{,}2$ cm. Pe muchia AB se ia $AI = 4$ cm, iar pe muchia AD se ia $AL = 3$ cm şi se secţionează paralelipipedul cu planul $A'IL$. Se cere:

a) volumul poliedrului rămas după înlăturarea tetraedrului $A'AIL$;

b) aria totală a poliedrului rămas.

8. O prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala de 13 cm şi raza cercului circumscris bazei de 6 cm. Să se afle volumul prismei.

9. În figura 13.8 este desenată o prismă hexagonală regulată dreaptă. Ştiind că $EB' = 26$ cm şi apotema bazei $OP = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, să se determine volumul şi aria laterală a prismei.

10. În figura 13.8, care reprezintă o prismă hexagonală regulată dreaptă, se cunosc $AB = 6$ cm şi $F'D = 12$ cm. Să se calculeze aria totală şi volumul prismei.

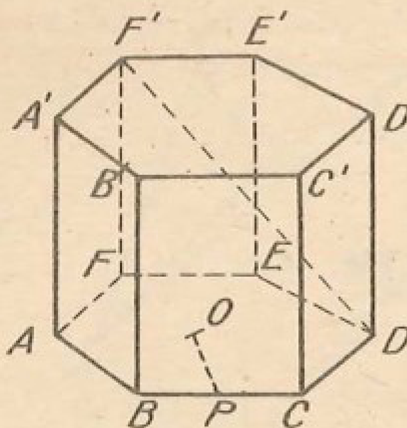


Fig. 13.8

11. O prismă oblică are bazele hexagoane regulate $ABCDEF$ şi $A'B'C'D'E'F'$ şi ca înălţime $A'O$, O fiind centrul bazei $ABCDEF$. Dacă latura hexagonului este de 4 cm şi $\sphericalangle AA'O = 60°$, să se calculeze:

a) volumul prismei;

b) unghiul feţei $ABB'A'$ cu planul bazei. (Valoarea unei funcţii trigonometrice a acestui unghi.)

12. Pe o masă se găseşte o vază plină cu apă, avînd forma unui paralelipiped dreptunghic, cu baza un pătrat de latură 8 cm şi înălţimea egală cu 12 cm. Se înclină vasul, astfel încît una din muchiile bazei să rămînă pe masă, pînă cînd porţiunile neudate ale muchiilor au lungimea de 4 cm. După aceasta vasul revine în poziţia iniţială. La ce înălţime se ridică apa rămasă?

13*. Un tetraedru are feţele laterale triunghiuri isoscele cu unghiurile de la vîrful comun format de laturile congruente de 30° şi muchia laterală a. Să se afle volumul tetraedrului.

14*. Un paralelipiped are toate muchiile egale cu a şi toate feţele sînt romburi, avînd un unghi ascuţit de 60°. Să se calculeze volumul paralelipipedului.

15. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a, O este centrul său, O_1, cel al feţei $ABCD$, O_2, cel al feţei $BB'C'C$, O_3 al feţei $CDD'C'$, M mijlocul lui DC, N mijlocul lui CC', P al lui CB. După înlăturarea cubului, $O_1PCMOO_2NO_3$, cum s-a modificat aria corpului rămas faţă de aria totală a cubului. Dar volumul?

16. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul muchiei AD, iar N este mijlocul muchiei CD. Ştiind că $MN = 5\sqrt{2}$ m, să se afle volumul şi aria totală a cubului.

17. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, N este mijlocul muchiei $C'B'$. Segmentul $AN = 3$ dm. Să se afle aria totală şi volumul cubului.

18. Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este de 48 m, iar diagonala de $5\sqrt{2}$ m. Să se afle aria totală a paralelipipedului.

19. O prismă dreaptă cu baza un trapez oarecare $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 25$ cm, $CD = 8$ cm, $BC = 13$ cm şi înălţimea de 5 cm, este secţionată cu două plane paralele ce trec prin D şi C şi sînt perpendiculare pe CD. Să se calculeze volumele şi ariile corpurilor formate, ştiind că înălţimea prismei este de 10 cm.

PIRAMIDA

O piramidă este definită de un poligon plan, pe care îl numim *bază*, şi un punct exterior planului său, pe care îl numim *vîrful piramidei*. Unim acest punct cu toate vîrfurile poligonului plan (fig. 14.1). Un triunghi care are un vîrf în vîrful piramidei şi latura opusă vîrfului este o latură a bazei se numeşte *faţă laterală a piramidei*. (Considerăm faţa piramidei cu interiorul ei cu tot.)

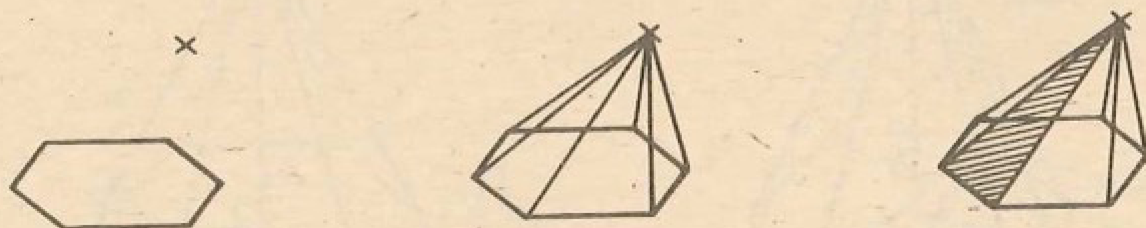


Fig. 14.1

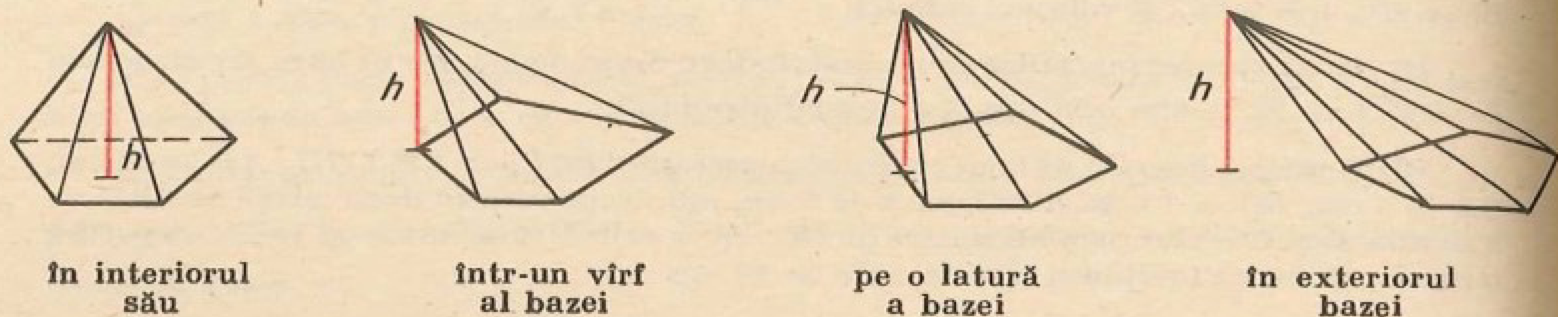
Segmentul (cu interiorul său), care uneşte vîrful piramidei cu un vîrf al bazei se numeşte *muchie laterală*. Laturile poligonului de la baza piramidei se numesc *muchiile de la bază*. Muchiile laterale ale piramidei, împreună cu muchiile de la bază se numesc *muchiile piramidei*. Reuniunea punctelor din interiorul feţelor laterale, a muchiilor laterale, a muchiilor de la bază şi a

interiorului bazei alcătuieşte *suprafaţa piramidei.* Interiorul piramidei se defineşte în mod asemănător ca la tetraedru şi la prismă.

Suprafaţa piramidei, reunită cu interiorul ei, alcătuieşte corpul numit piramidă. Cîteodată însă prin piramidă vom înţelege numai suprafaţa sa.

Distanţa dintre vîrf şi planul bazei se numeşte *înălţime*. Luată astfel, înălţimea este un număr. În unele probleme o vom considera şi ca segment cu un capăt în vîrf şi cu celălalt în planul bazei (fig. 14.2).

Înălţimea unei piramide poate să cadă



în interiorul său — într-un vîrf al bazei — pe o latură a bazei — în exteriorul bazei

Fig. 14.2

După natura poligonului de bază, piramida se numeşte patrulateră, exagonală etc., tetraedrul este în fond o piramidă triunghiulară.

Dacă baza piramidei este un poligon regulat, iar înălţimea coborîtă din vîrful piramidei trece prin centrul bazei, piramida se numeşte „*regulată*".

Într-o piramidă regulată, înălţimea unei feţe se numeşte, apotema piramidei. Ea este ipotenuza într-un triunghi dreptunghic în care catetele sînt înălţimea piramidei şi apotema bazei. Aplicînd teorema lui Pitagora obţinem, cu notaţiile din figura 14.3: $a'^2 = a^2 + h^2$.

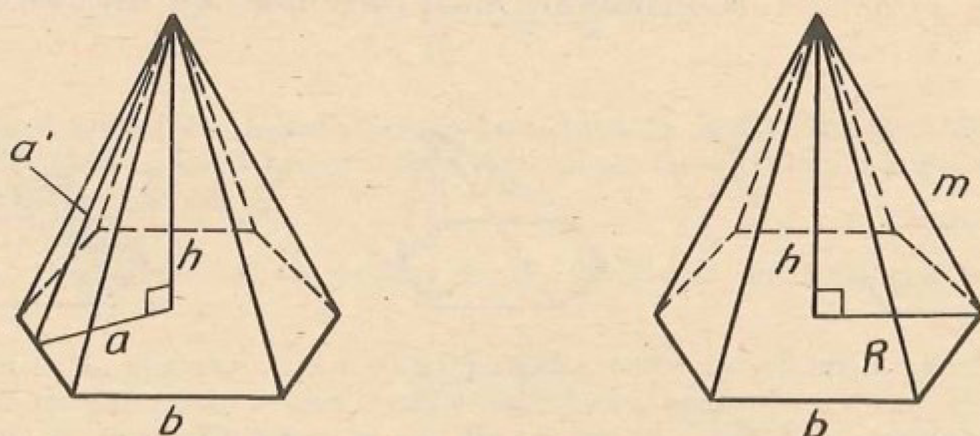


Fig. 14.3

Dacă notăm cu R raza cercului circumscris bazei şi cu m muchia laterală a piramidei, putem exprima, cu ajutorul teoremei lui Pitagora, înălţimea, încă într-un mod: $h^2 = m^2 - R^2$. Se mai poate stabili o legătură între

elementele bazei unei piramide regulate, tot cu ajutorul teoremei lui Pitagora: $a'^2 + \frac{b^2}{4} = R^2$.

Aria laterală a piramidei este suma ariilor fețelor ei laterale. În cazul piramidei regulate, ea se obține din formula $\mathcal{A}_{lat} = \frac{a' \cdot p}{2}$ unde p este perimetrul bazei, sau $\mathcal{A}_{lat} = \frac{n \cdot b \cdot a'}{2}$, unde n este numărul laturilor bazei, b latura bazei, a' apotema piramidei. Într-adevăr, avem n fețe laterale şi aria fiecăreia este $\frac{b \cdot a'}{2}$.

Aria totală a piramidei este suma dintre aria laterală şi aria bazei. Se obține, în cazul piramidei regulate: $\mathcal{A}_{tot} = \frac{n \cdot b \cdot (a' + a)}{2}$ sau $\mathcal{A}_{tot} = \frac{(a + a')p}{2}$.

Dăm mai jos două moduri de a „desfăşura" o piramidă. (Expresia „a desfăşura" are acelaşi înţeles ca la tetraedru şi paralelipiped (fig. 14.4 şi fig. 14.5).

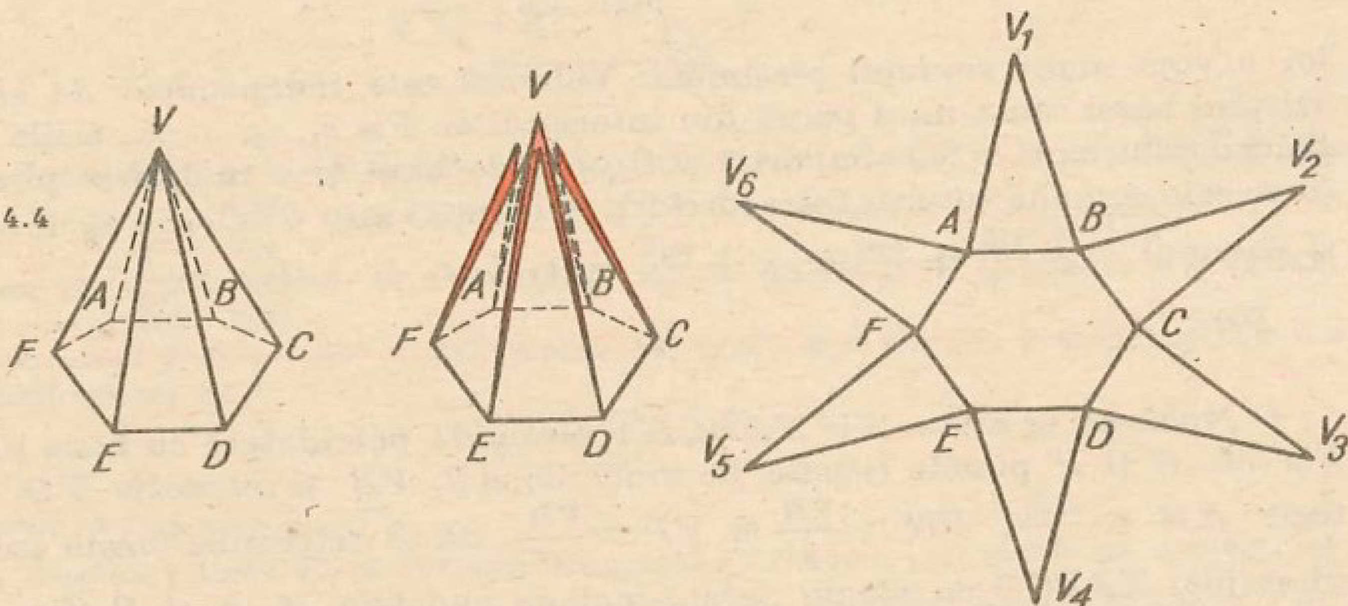


Fig. 14.4

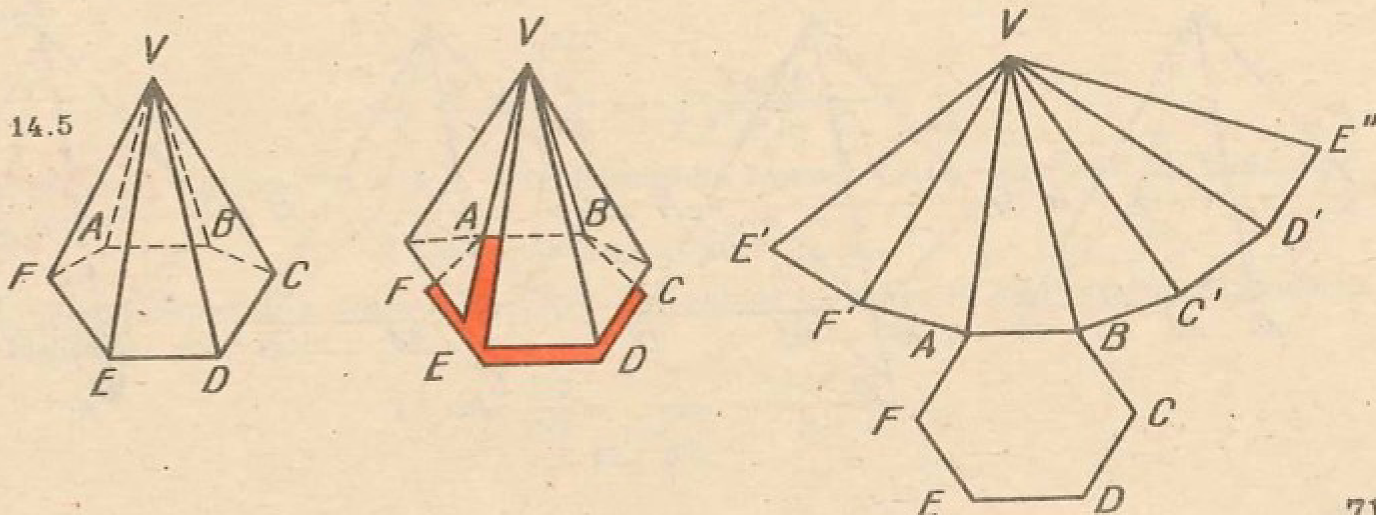


Fig. 14.5

Presupunem că s-au dus diagonalele bazei care pornesc dintr-un vîrf al ei. Planele determinate de aceste diagonale cu vîrful, luate ca plane de secţiune, împart piramida în tetraedre de aceeaşi înălţime (fig. 14.6). Suma volumelor

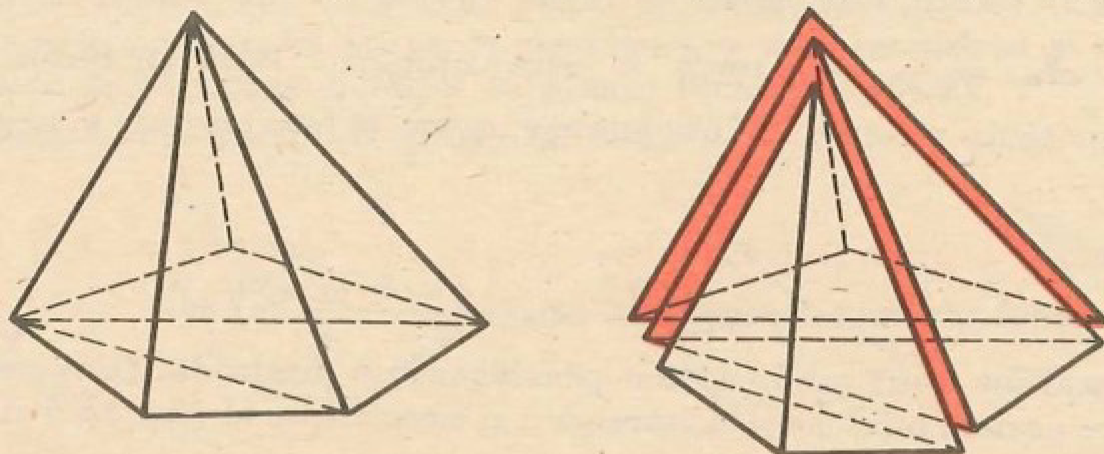


Fig. 14.6

lor o vom numi volumul piramidei. Volumul este independent de alegerea vîrfului bazei sau a unui punct din interiorul ei. Fie $s_1, s_2, \dots s_n$, ariile triunghiurilor în care a fost împărţit poligonul de bază şi h înălţimea piramidei (care este comună tuturor tetraedrelor). Aria bazei este $S = s_1 + s_2 + \dots + s_n$ şi volumul $\mathcal{V} = \frac{s_1 h}{3} + \frac{s_2 h}{3} + \dots + \frac{s_n h}{3} = (s_1 + s_2 + \dots + s_n) \cdot \frac{h}{3} = \frac{Sh}{3}$.

Deci, *volumul piramidei este o treime din produsul dintre aria bazei şi înălţime.*

O problemă de desen. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră cu baza $ABCD$. Fie M, N şi P puncte situate pe muchiile AB, VB şi respectiv VD, astfel încît $AM < \frac{AB}{2}$, $VN > \frac{VB}{2}$ şi $VP > \frac{VD}{2}$. Să se determine forma secţiunii piramidei $VABCD$ cu planul determinat de punctele M, N şi P (fig. 14.7).

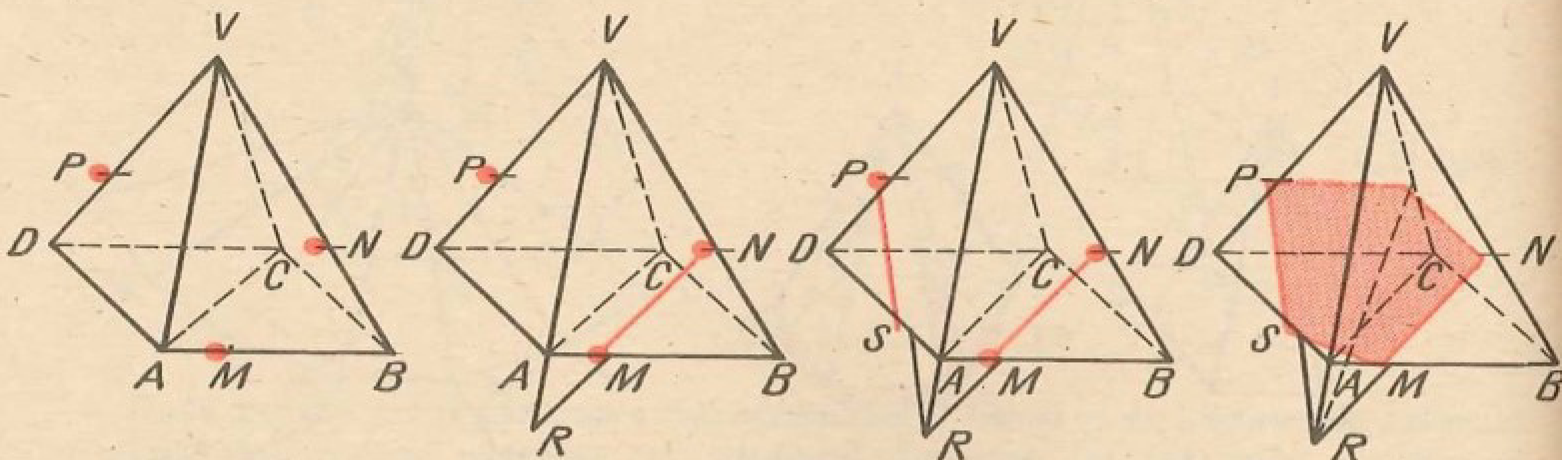


Fig. 14.7

Rezolvare. Cele patru desene din figura 14.7 rezolvă problema propusă. Cititorii vor face singuri comentariul în aceeaşi manieră cu cel de la problemele rezolvate privind secţiunile cu un plan, de la tetraedru şi paralelipiped.

Problemă rezolvată. Se dă o piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ cu elemente de lungimi cunoscute (fig. 14.8). Vom calcula cîteva din elementele-unghiuri care apar.

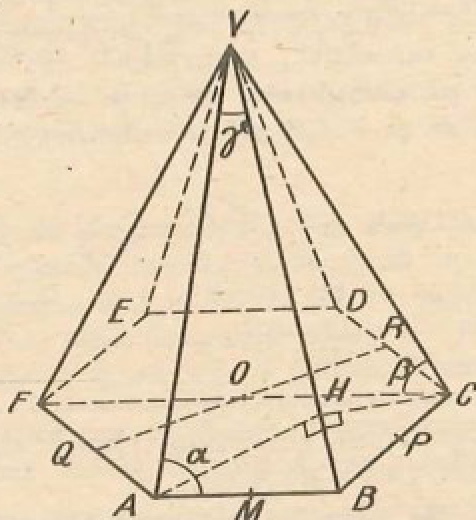


Fig. 14.8

1. *Unghiul α dintre AB şi VA.* În triunghiul isoscel VAB, fie M mijlocul lui AB. Avem $\cos\alpha = \frac{AM}{VA}$. Cum $VA = \sqrt{h^2 + a^2}$, rezultă: $\cos\alpha = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + a^2}}$.

Cum $AB \parallel DE$ rezultă că $\alpha = \sphericalangle(DE, VD) = \sphericalangle(AB, VD)$ şi analog $\alpha = \sphericalangle(AB, VE)$ şi $\alpha = \sphericalangle(AB, VB)$.

2. *Unghiul β dintre AB şi VC.* Avem $AB \parallel CF$, deci unghiul β se determină din triunghiul isoscel VCF:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{VO}{OC} = \frac{h}{a}.$$

Avem şi $\beta = \sphericalangle(AB, VF)$.

3. *Unghiul γ dintre VA şi VB.* Din triunghiul VAB avem $\gamma = 180° - 2\alpha = 2(90° - \alpha)$.

4. *Unghiul δ dintre VA şi VC.* Acest unghi se determină din triunghiul isoscel VAC. AC este latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază a, deci $AC = a\sqrt{3}$ şi obţinem:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\frac{AC}{2}}{VA} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

5. *Unghiul ε dintre VA şi VD.* Din triunghiul isoscel VAD, congruent cu triunghiul VCF, avem:

$$\varepsilon = 180° - 2\beta = 2(90° - \beta).$$

6. *Unghiul diedru π dintre planul bazei şi planul unei feţe* (VAF) este unghiul din Q al triunghiului VOQ, deci

$$\operatorname{tg}\pi = \frac{VO}{OQ} = \frac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3a}.$$

7. *Unghiul diedru σ dintre planele fețelor VAB și VBC.* Perpendicularele coborîte din A și C pe VB cad în același punct H; $AH = CH$, deci, în triunghiul ACH, avem:

$$\sin\frac{\sigma}{2} = \frac{\frac{AC}{2}}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2AH}; \quad AH \cdot VB = AB \cdot VM \text{ (dublul ariei triunghiului } VAB)$$

$$\text{deci } AH = \frac{AB \cdot VM}{VB} = \frac{a\sqrt{4h^2 + 3a^2}}{2\sqrt{h^2 + a^2}} \text{ etc.}$$

8. *Unghiul diedru ω dintre planele fețelor VCD și VAF.* Avem $CD \parallel AF$, deci $AF \parallel (VCD)$, deci planele fețelor VCD și VAF se intersectează după o paralelă la CD și AF, ce trece prin V.

Avem $VR \perp CD$, $VQ \perp AF$, deci $\omega = \widehat{RVQ}$, $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{RO}{VO} = \frac{a\sqrt{3}}{2h}$.

PROBLEME 14

1. Să se determine aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate a cărei înălțime este de 4 cm, iar apotema piramidei este de 8 cm.

2. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este de 14,76 m², iar cea totală de 18 m². Să se determine latura bazei și înălțimea piramidei.

3. Muchia laterală a unei piramide triunghiulare regulate formează cu planul bazei un unghi de 45°, iar latura bazei este egală cu a. Să se determine aria laterală a piramidei.

4. Într-o piramidă patrulateră regulată apotema bazei este de 24 cm, iar apotema piramidei este de 37 cm. Să se calculeze: muchia laterală a piramidei, înălțimea și aria ei laterală.

5. Într-o piramidă triunghiulară regulată se cunosc: latura bazei $l_3 = 5\sqrt{3}$ m și înălțimea piramidei $h = 6$ m. Să se calculeze muchia laterală, apotema piramidei și aria ei totală.

6. Într-o piramidă hexagonală regulată se dă: raza cercului circumscris bazei $R = 12$ m și muchia laterală $m = 13$ cm. Să se calculeze aria laterală, aria totală și înălțimea piramidei.

7. În piramida $VABCD$, baza $ABCD$ este un pătrat cu latura a, iar fețele laterale VAB, VBC, VDC și VAD sînt triunghiuri echilaterale. Să se determine (în funcție de a):
   a) funcțiile trigonometrice ale unghiului dintre fețele VAD și VAB;
   b) funcțiile trigonometrice ale unghiului dintre fețele VAB și VDC;
   c) unghiul dintre VA și planul (ABC).

8. Se consideră piramida triunghiulară $ABCD$ cu muchiile $AB = BC = CD = DA$, $AB = a$. Fie M și N mijloacele muchiilor AC și BD. Să se arate că MN este perpendiculară pe AC și BD.

8. Se dă un tetraedru regulat de muchie a.
   a) Să se determine înălțimea și apotema tetraedrului, precum și valoarea cosinusului unghiului dintre două fețe ale tetraedrului.
   b) Să se determine distanțele unui punct oarecare de pe înălțimea tetraedrului la fețele laterale, în funcție de distanța x a acestuia la planul bazei.
   c) Utilizînd rezultatul obținut la punctul b), să se arate că suma distanțelor oricărui punct de pe înălțime la fețele tetraedrului este constantă.

10. Prin mijlocul înălţimii unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ se duce un plan paralel cu una din feţele laterale. Să se afle aria secţiunii formate, ştiind că aria unei feţe laterale este de 72 cm².

11. Baza unei piramide este un triunghi echilateral cu latura de 8 cm. Una dintre feţele laterale este, de asemenea, un triunghi echilateral, al cărui plan este perpendicular pe planul bazei. Să se determine aria laterală a acestei piramide.

12. O piramidă are ca bază trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, $AD = a$, $BC = 2a$ şi $AB = 2a$). Înălţimea piramidei VO cade în punctul O, mijlocul segmentului AB. Ştiind că $VO = a$, să se calculeze:

a) ariile triunghiurilor VAB, VAD, VBC;

b) volumul piramidei.

13. O piramidă are ca bază un paralelogram $ABCD$ şi vîrful V, astfel încît muchia VD să fie perpendiculară pe planul bazei. Se notează cu M mijlocul muchiei VB, B fiind vîrful opus lui D în paralelogramul $ABCD$. Să se arate că:

a) planele MAC şi MBD sînt perpendiculare pe planul bazei şi $MB \equiv MD$;

b) unghiurile feţelor MAD şi MBC cu planul bazei sînt congruente.

14. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei egală cu a, iar secţiunea diagonală este echivalentă cu baza. Să se determine aria laterală a piramidei.

15. O piramidă are baza un paralelogram. Ce poligon se obţine secţionînd această piramidă cu un plan paralel cu o faţă laterală a sa?

16. Să se arate că oricum am alege trei muchii ale unei piramide, cel puţin două sînt situate în acelaşi plan.

17. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu muchia bazei egală cu 8 cm, se duce, prin mijlocul muchiei VA, un plan paralel cu planul triunghiului VBD. Ştiind că muchiile piramidei sînt congruente cu diagonala bazei, să se calculeze:

a) aria laterală şi volumul piramidei;

b) aria secţiunii determinată în piramidă.

18. Fie o piramidă patrulateră regulată cu baza un pătrat $ABCD$ de latură 1 cm. Ştiind că unghiurile diedre a două feţe opuse sînt congruente cu unghiurile diedre pe care acestea le formează cu baza, să se determine:

a) muchiile laterale;

b) înălţimea piramidei;

c) aria laterală şi aria totală.

19. O piramidă cu baza $ABCD$ dreptunghi, are $AB = 2a$, $BC = a$ şi înălţimea $SD = 2a$. Pe muchia SB se ia mijlocul ei, P.

a) Să se arate că triunghiul APC este isoscel şi să se calculeze aria sa.

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

20. Fie $SABCD$ o piramidă regulată cu baza pătratul $ABCD$ de latură $3\sqrt{2}$ şi muchie laterală 5.

a) Să se afle aria laterală şi volumul piramidei.

b) Dacă notăm cu O centrul pătratului şi considerăm un punct M pe muchia SB, să se determine cosinusul unghiului format de OM cu planul pătratului, astfel încît aria triunghiului ACM să fie minimă.

21*. Dacă o piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de mărime a constantă şi latura x a bazei variabilă (dar baza este mereu un triunghi echilateral de latură x), să se găsească mărimea lui x pentru care volumul piramidei este maxim.

22. Într-o piramidă de înălțime h, să se spună la ce distanță de vîrf trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încît aria totală a piramidei mici obținute, să fie de două ori mai mică decît a celei inițiale.

23. O piramidă are muchiile laterale congruente și ele formează cu planul bazei unghiuri de 45°. Baza este un trapez isoscel cu unghiurile ascuțite de cîte 60° și bazele de 6 cm și 8 cm. Să se calculeze:

a) raza cercului circumscris trapezului isoscel;

b) volumul piramidei.

24. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de $6\sqrt{3}$ m și apotema (piramidei) de 5 m. Să se afle volumul piramidei.

25. Dreptunghiul $ABCD$ este baza unui paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$, în care $AB \equiv AE$, $AB = 2a$ și $AD = a\sqrt{3}$. Fie P mijlocul laturii AB și Q mijlocul laturii AE. Să se calculeze volumul tetraedrului $FHPQ$ în funcție de a.

26. Printr-una din laturile bazei unei piramide triunghiulare regulate cu înălțimea $h = 4\sqrt{3}$ cm și latura bazei 5 cm, se duce planul perpendicular pe muchia opusă. Să se calculeze aria secțiunii obținute.

27. Fețele unei piramide triunghiulare regulate sînt triunghiuri isoscele de bază 4 și unghi la vîrf 30°. Să se exprime volumul piramidei, cu ajutorul unor funcții trigonometrice ale unghiului de 15°.

28. Fie $OABC$ o piramidă triunghiulară cu muchiile OA, OB, OC perpendiculare, două cîte două, și $OA = 30$ cm, $OB = 40$ cm, $OC = 70$ cm. Să se afle distanța de la vîrful O la planul ABC.

29. Fie $SABC$ un tetraedru regulat și M mijlocul muchiei SC.

a) Să se demonstreze că dreapta SC este perpendiculară pe planul MAB.

b) Să se afle raportul dintre volumele piramidelor $SABM$ și $MABC$.

c) Să se arate că ariile totale ale acestor piramide sînt egale.

d) Ce poziție trebuie să aibă punctul M pe SC, pentru ca aria triunghiului ABM să fie minimă.

30*. Secționînd partea superioară a unui acoperiș, se obține un corp ca în figura 14.9 cu dimensiunile de acolo (bazele sînt dreptunghiuri, iar fețele laterale trapeze isoscele). Prelungind AA', DD' și BB', CC', pînă se întîlnesc, să se găsească volumul acoperișului din care provine această secțiune.

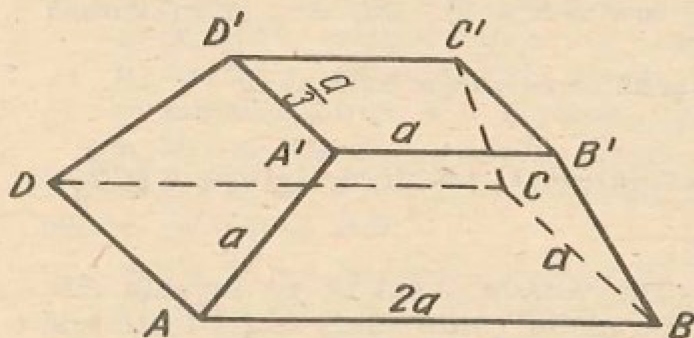


Fig. 14.9

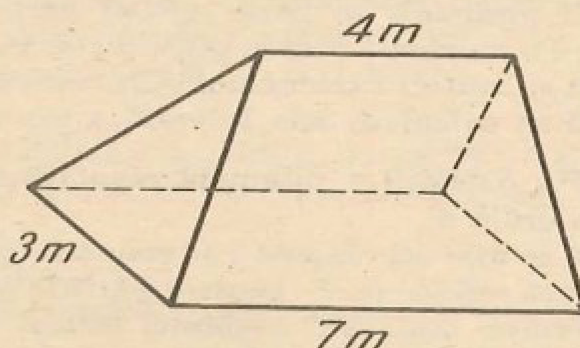


Fig. 14.10

31*. În figura 14.10 este reprezentat un cort, cu baza un dreptunghi, două fețe triunghiuri echilaterale și două fețe trapeze isoscele. Să se determine volumul cortului.

32. Pe un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia $DC = a$ se așază o piramidă regulată $VABCD$, cu toate fețele triunghiuri echilaterale (figura 14.11).

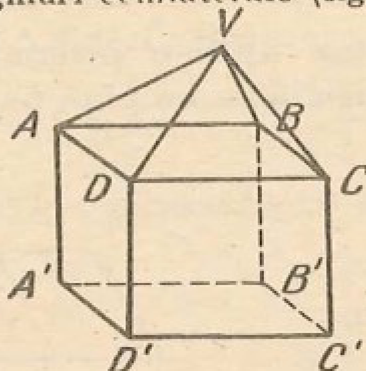


Fig. 14.11

a) Să se determine volumul corpului obținut.

b) Să se arate că $AV \perp VC$.

c) Dacă nu se cunoaște latura a ci numai lungimea segmentului $VA' = 3\sqrt{2+\sqrt{2}}$ metri, să se găsească lungimea laturii a.

33. Se dă o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$ de volum 8 m³. Fie M mijlocul muchiei laterale BB'. Să se afle volumul piramidei $MACC'A'$.

34. O piramidă regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 4$ cm și apotema piramidei egală cu 2,5 cm. Fie A', B', C', D' mijloacele muchiilor laterale VA, VB, VC, VD (în această ordine) și fie N un punct oarecare în planul bazei. Să se afle volumul piramidei $NA'B'C'D'$.

35. Într-o cutie cubică cu capacul $ABCD$ și muchia $AB = 2$ dm, punem o piramidă regulată $VA'B'C'D'$ unde $A'B'C'D'$ este cealaltă bază a cubului. Dar capacul $ABCD$ nu se mai închide. El face un unghi de 45° cu planul bazei.

a) Care este volumul piramidei?

b) Să se găsească sinusul unghiului plan al diedrului format de o față laterală a piramidei cu baza acesteia.

36. Dacă desfășurăm suprafața laterală a unei piramide triunghiulare regulate, obținem figura 14.12. Știind că latura bazei este $BC = 10$ dm, să se afle aria și volumul piramidei (VA, VA' sînt în prelungire).

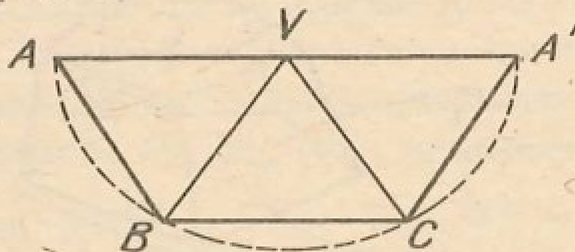


Fig. 14.12

37. Se dă o piramidă patrulateră regulată cu vîrful V și baza $ABCD$ ($VA \equiv VB \equiv CV \equiv DV$, $VA = a$) și unghiurile de la vîrf ale fețelor laterale de 30°. O furnică pornește din vîrful A și merge pe toate fețele laterale, în linie dreaptă, pînă revine în punctul A. Se notează cu B', C', D' punctele unde furnica traversează respectiv muchiile VB, VC și VD. Se cere:

a) să se desfășoare pe un plan suprafața laterală a piramidei și să se traseze pe ea drumul furnicii;

b) cînd este drumul acesta cel mai scurt și în acest caz să se calculeze lungimea lui;

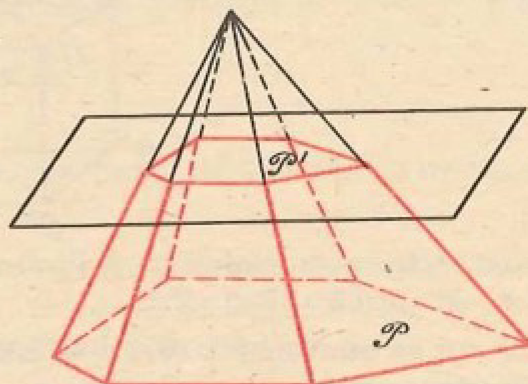
c) unghiurile sub care drumul furnicii taie muchiile laterale.

38. Să se arate că perpendicularele pe fețele unui tetraedru, în centrele cercurilor circumscrise acestor fețe, sînt concurente.

Trunchi de piramidă

Corpul ce rezultă îndepărtînd dintr-o piramidă o piramidă mai mică, obținută secționînd piramida inițială cu un plan paralel cu baza ei, se numește *trunchi de piramidă*.

Fig. 15.1



Cu notațiile din figura 15.1:

a) Poligonul $(\mathcal{P})$ se numește *baza mare*.

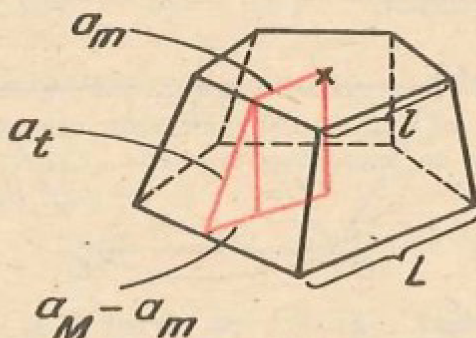
b) Poligonul din planul de secțiune $(\mathcal{P}')$ se numește *baza mică*.

c) Toate trapezele ce rămîn din fețele laterale, în urma secționării și îndepărtării piramidei mai mici, se numesc *fețe laterale*.

Este ușor de arătat că cele două baze sînt poligoane asemenea. Lăsăm această demonstrație pe seama cititorului.

Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată, el se numește trunchi de piramidă regulată. Fețele sale laterale sînt trapeze isoscele congruente. Vom numi înălțimea unei astfel de fețe, *apotema trunchiului de piramidă*. Deci, la un trunchi de piramidă regulată, avem trei feluri de apoteme: *apotema trunchiului*, *apotema bazei mari* și *apotema bazei mici*.

Fig. 15.2



Aria laterală a unui trunchi de piramidă regulată este suma ariilor tuturor fețelor laterale. Notînd cu n numărul laturilor unei baze, cu a_t apotema trunchiului, cu l lungimea laturii bazei mici și cu L cea a bazei mari, $\mathcal{A}_l$ fiind aria laterală, se obține, printr-un procedeu asemănător cu cel de la piramidă, că:

$$\mathcal{A}_l = n \cdot \frac{(L + l) \cdot a_t}{2}.$$

Aria totală a trunchiului de piramidă se obţine adunînd la aria sa laterală suma ariilor celor două baze. Dacă notăm cu $\mathcal{A}_t$ aria totală, cu a_M apotema bazei mari şi cu a_m pe cea a bazei mici:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \frac{L \cdot a_M + l \cdot a_m}{2} \cdot n$$

Desfăşurarea trunchiului de piramidă se face asemănător cu cea a unei prisme (fig. 15.3):

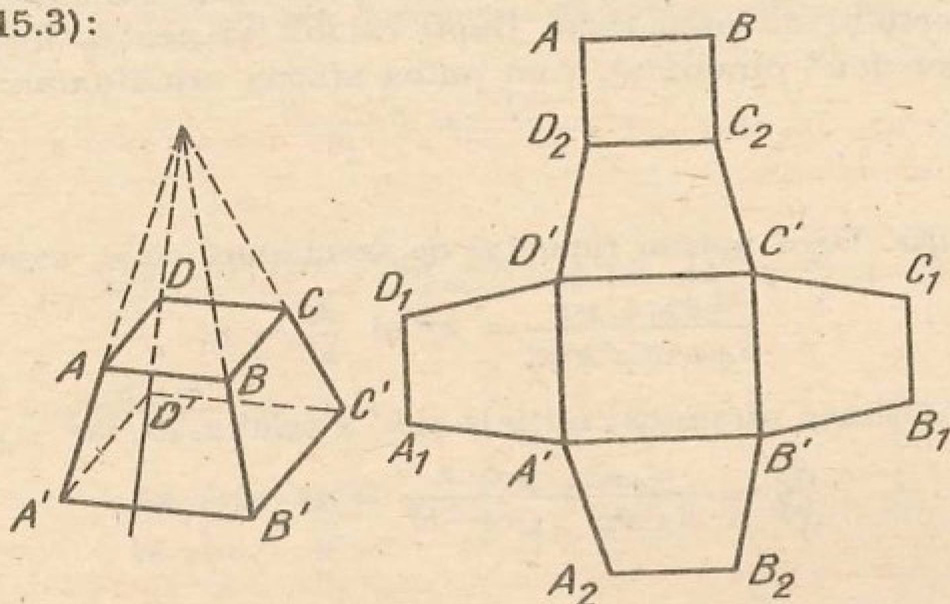


Fig. 15.3

Distanţa dintre planele bazelor trunchiului de piramidă o numim înălţime. Luată astfel, ea este număr. În unele probleme o vom considera şi ca un segment cu capetele respective în planele bazelor şi perpendicular pe aceste baze.

Calculul înălţimii trunchiului de piramidă regulată

Notăm cu L şi l laturile bazelor, cu a_M şi a_m apotemele respective ale bazelor, cu a_t apotema trunchiului, cu m muchia lui laterală, cu R_M şi R_m razele cercurilor circumscrise bazelor şi cu h înălţimea trunchiului de piramidă.

a) Să se exprime, în funcţie de a_M, a_m şi a_t, înălţimea h (fig. 15.4).

b) Să se exprime, în funcţie de R_M, R_m şi m, înălţimea h (fig. 15.5).

$$h^2 = a_t^2 - (a_M - a_m)^2 \qquad h^2 = m^2 - (R_M - R_m)^2$$

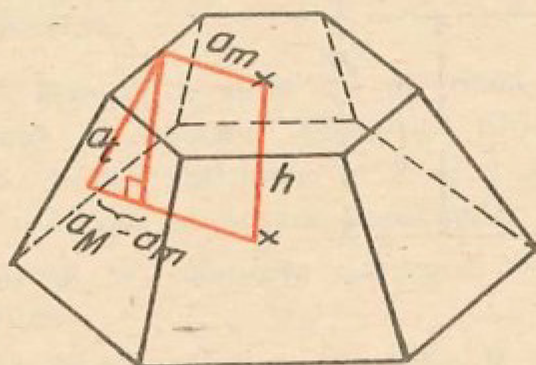


Fig. 15.4

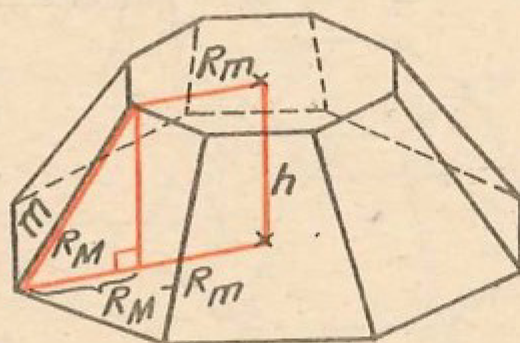


Fig. 15.5

În general, un plan paralel cu baza $ABC \dots MN$ a unei piramide determină încă o piramidă cu baza $A'B'C' \dots M'N'$ şi cu acelaşi vîrf P, pe care o vom numi „asemenea" cu piramida mare, pentru că toate feţele de tipul PAB sînt asemenea cu cele de tipul $PA'B'$, bazele $ABC \dots MN$ şi $A'B'C' \dots M'N'$ sînt şi ele asemenea şi raportul lor de asemănare (raportul a două segmente omoloage), prin tranzitivitate, se poate dovedi că este acelaşi.

Dacă, în plan, raportul ariilor a două poligoane asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare (fapt valabil şi pentru ariile laterale şi totale ale celor două piramide), vom putea afirma următoarea:

Teoremă. *Raportul volumelor a două piramide asemenea este egal cu cubul raportului de asemănare.*

Demonstraţie. Dacă notăm raportul de asemănare cu n, avem:

$$\frac{S_{ABC \dots MN}}{S_{A'B'C' \dots M'N'}} = n^2 \text{ şi } \frac{h}{h'} = n,$$

unde h este înălţimea piramidei iniţiale şi h' a celei mici, iar

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} = \frac{S_{ABC \dots MN} \cdot h}{S_{A'B'C' \dots M'N'} \cdot h'} = n^2 \cdot n = n^3.$$

Accentuăm că aceasta este una din teoremele, care, aplicate, ne scurtează mult calculul laborios în destule ocazii.

VOLUMUL TRUNCHIULUI DE PIRAMIDĂ

Teoremă. *Volumul trunchiului de piramidă este egal cu o treime din înălţime înmulţită cu suma dintre aria bazei mari, aria bazei mici şi rădăcina pătrată din produsul ariilor celor două baze.*

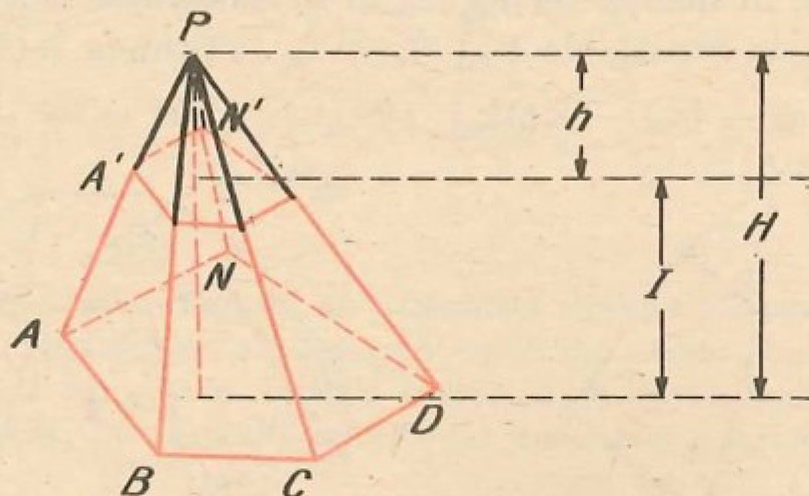


Fig. 15.6

Avem deci de arătat că $\mathcal{V} = \frac{I}{3}(S + s + \sqrt{Ss})$, unde $\mathcal{V}$ este volumul trunchiului, I este înălţimea trunchiului de piramidă, S aria bazei mari şi s aria bazei mici. H şi h sînt mărimi ajutătoare, şi anume, înălţimile piramidelor aşa cum se formează ele în desen, prin prelungirea muchiilor, iar $\mathcal{V}_1$ şi v_1 volumele piramidelor respective (fig. 15.6).

Ştim că $\frac{\mathcal{V}_1}{v_1} = \frac{H^3}{h^3}$ şi, dintr-o proporţie derivată, obţinem:

$$\frac{\mathcal{V}_1 - v_1}{v_1} = \frac{H^3 - h^3}{h^3}.$$

Deci,

$$\mathcal{V} = \frac{v_1 (H - h)(H^2 + Hh + h^2)}{h^3} = \frac{v_1 I}{h} \cdot \left(\frac{H^2}{h^2} + \frac{H}{h} + 1\right).$$

Dar $\frac{H}{h} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}}$. Rezultă:

$$\mathcal{V} = \frac{shI}{3h} \cdot \left(\frac{S}{s} + \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}} + 1\right) = \frac{I}{3} \cdot (S + \sqrt{Ss} + s),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

PROBLEME 15

1. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de $6\sqrt{3}$ m, latura bazei mici de $2\sqrt{3}$ m şi muchia laterală de 5 m. Să se calculeze aria laterală şi volumul trunchiului.

2. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari L, latura bazei mici l şi înălţimea h. Să se calculeze, în funcţie de L, l şi h, înălţimea piramidei din care provine trunchiul.

3. O piramidă are aria bazei de 8 cm² şi înălţimea de 10 cm. Se secţionează cu un plan paralel cu baza dus prin mijlocul înălţimii. Se cere volumul trunchiului de piramidă.

4. Într-un trunchi de piramidă hexagonală regulată se cunosc (notaţiile fiind cele din figura 15.7): înălţimea $A'P = 3$ cm, distanţa $B'E' = 8$ cm şi latura bazei mari $DE = 8$ cm.

a) Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă.

b) Să se calculeze aria laterală a trunchiului de piramidă.

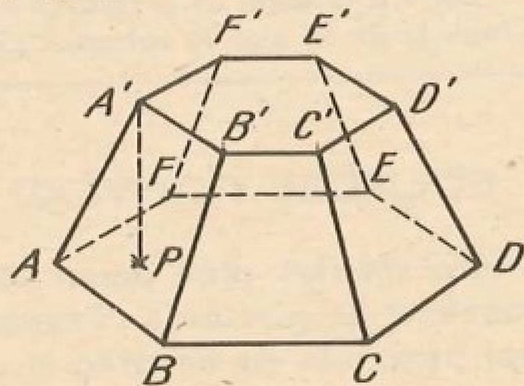


Fig. 15.7

5. Se dă o piramidă regulată $VABCD$, avînd baza un pătrat $ABCD$ şi lungimea înălţimii egală cu 8 cm. La ce distanţă de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu planul bazei, astfel încît raportul dintre volumul trunchiului de piramidă obţinut şi volumul piramidei $VABCD$ să fie egal cu $\frac{7}{8}$?

6. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată se cunosc: latura bazei mari $L = 12$ cm, latura bazei mici $l = 0{,}6$ dm şi volumul $\mathcal{V} = 63\sqrt{3}$ cm³. Să se afle înălţimea, apotema, muchia şi aria laterală a trunchiului.

7. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată se cunosc: latura bazei mari $L = 10$ m, raza cercului circumscris bazei mici $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ m şi aria laterală $\mathcal{A}_l = 168$ m². Să se afle volumul şi muchia laterală a trunchiului de piramidă.

8. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are diagonala de 9 m şi laturile bazelor de 7 m şi 5 m. Se cere aria laterală şi volumul său.

9. Un trunchi de piramidă are ca baze două romburi cu laturile de 6 cm şi 8 cm şi cu cîte un unghi de 120°. Înălţimea trunchiului este egală cu triplul diagonalei mari a bazei mari şi uneşte centrele romburilor. Să se calculeze înălţimea piramidei din care provine trunchiul.

10. O piramidă are muchiile laterale congruente şi ele formează cu planul bazei unghiuri de 45°. Baza este un trapez isoscel cu unghiurile ascuţite de cîte 60° şi bazele de 6 cm şi 8 cm. Se secţionează piramida cu un plan paralel cu baza şi care împarte înălţimea în două părţi egale. Să se afle volumul trunchiului de piramidă obţinut.

11. O piramidă regulată are înălţimea de 12 cm. La ce distanţă de vîrf trebuie să se facă o secţiune, printr-un plan paralel cu baza, astfel încît aria laterală a piramidei mici, ce se formează, să fie egală cu aria laterală a trunchiului de piramidă regulată.

12. Un trunchi de piramidă regulată are ca baze două triunghiuri echilaterale cu laturile a şi respectiv $2a$. Apotema trunchiului este egală cu $4a$. Să se calculeze, în funcţie de a, aria totală şi volumul trunchiului de piramidă.

13. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de a metri, latura bazei mici de b metri şi unghiul format de muchia laterală cu muchia bazei mari, care pornesc din acelaşi vîrf, egal cu 60°. Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă.

14*. Un trunchi de piramidă are ariile bazelor egale cu S_1 şi S_2. Se face o secţiune printr-un plan paralel cu bazele, la aceeaşi distanţă faţă de ambele baze Să se calculeze aria S a acestei secţiuni în funcţie de S_1 şi S_2.

15. Un trunchi de piramidă are ariile bazelor S şi s şi înălţimea I. Să se calculeze, în funcţie de S, s şi I, volumul piramidei din care face parte trunchiul.

POLIEDRE CONVEXE ÎN GENERAL

Am studiat pînă acum cîteva poliedre particulare: prisma, piramida şi trunchiul de piramidă. Trunchiul de piramidă a fost obţinut prin intersecţia unei piramide cu un plan şi „îndepărtarea" unei părţi din piramida iniţială. De asemenea, în toate problemele de secţiune cu un plan a poliedrelor parti-

culare obţinute pînă acum, acest plan a determinat, de o parte şi de alta a sa, două corpuri care nu sînt neapărat ambele prisme, sau piramide, sau trunchiuri de piramidă (fig. 16.1).

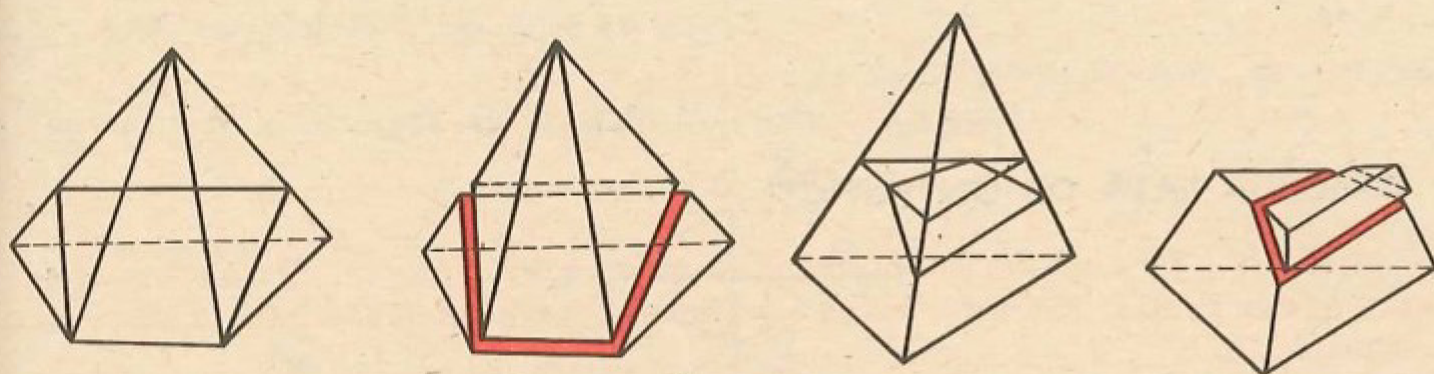


Fig. 16.1

Corpurile obţinute, printr-o astfel de secţionare, pot fi şi ele secţionate mai departe şi apoi separate cele două părţi etc. Aceste operaţii (una sau mai multe succesiv), aceste „cioplirі", ca să le numim aşa, duc la nişte corpuri pe care le vom numi poliedre convexe (fig. 16.2).

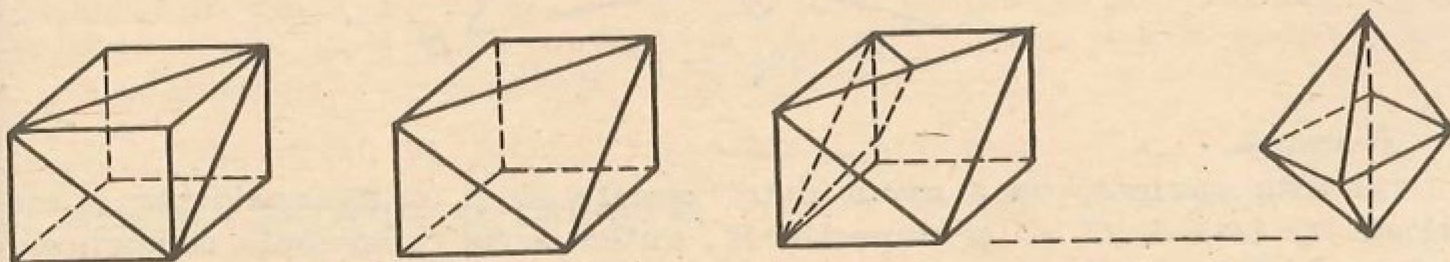


Fig. 16.2

Ele au un număr finit de feţe, care sînt poligoane convexe, iar laturile acestora se numesc muchii. O muchie (fără capete) este comună pentru două şi numai pentru două feţe. Vîrfurile feţelor sînt vîrfurile poliedrului. Dintr-un vîrf pornesc tot atîtea muchii cîte feţe. Din orice vîrf al poliedrului convex, la un vîrf se poate ajunge pe un traseu format numai din muchii.

Acestea sînt numai o parte din proprietăţile poliedrelor convexe.

TRANSFORMĂRI ÎN SPAȚIU

SIMETRIA FAȚĂ DE UN PUNCT

Dîndu-se un punct, numit centru de simerie (O), spunem că simetricul unui punct A din spațiu față de O este un punct A', astfel încît O să fie mijlocul segmentului AA'.

În fond, definiția este asemănătoare cu cea din plan.

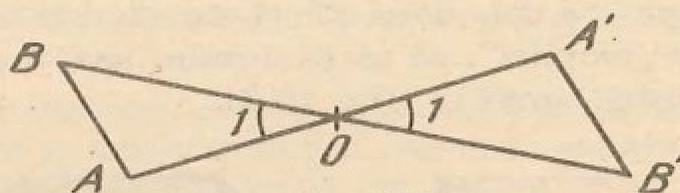


Fig. 17.1

Teoremă. *Prin simetria față de un punct, distanța se păstrează.*

Cu alte cuvinte, dacă avem două puncte A și B și considerăm simetricele lor față de O, A' și respectiv B', putem scrie congruența segmentelor $AB \equiv A'B'$ (fig. 17.1).

Evident, segmentele AA', BB' sînt coplanare (au O comun). Triunghiurile AOB și $A'OB'$ sînt congruente (cazul I de congruență), de unde rezultă că $AB \equiv A'B'$. Deci simetria față de un punct este o izometrie.

Consecințe. Prin această transformare:

1) *Interiorul unui segment se transformă în interiorul segmentului transformat* (segmentului simetric). Fie C un punct interior segmentului AB. Deci, $AC + CB = AB$. Fie C' simetricul lui C. Dacă C' nu ar fi interior lui $A'B'$, atunci $A'C' + C'B' > A'B'$. Dar cum $AC \equiv A'C'$ și $CB \equiv C'B'$, ar rezulta că $AB > A'B'$ și s-ar contrazice teorema anterioară. Deci C' este interior segmentului $A'B'$.

2) *Simetricul unui triunghi este un triunghi congruent cu el.* Evident, se păstrează congruența laturilor.

3) *Simetrica unei drepte este tot o dreaptă.* Se iau oricare trei puncte pe o dreaptă d : A, B, C. Sigur unul din ele se află între celelalte două, de exemplu B între A și C. Atunci $AB + BC = AC$ și distanțele rămîn aceleași, procedînd prin reducere la absurd s-ar ajunge la $A'C' < AC$, fals...

4) *Simetricul unui unghi este un unghi congruent cu el.*

Evident, simetricul vîrfului este vîrful simetricului (Aparţinînd ambelor drepte-suport.) Luăm (cu notaţiile din figura 17.2) $B \in Ax$, $C \in Ay \Rightarrow$ $\Rightarrow B' \in A'x'$, $C' \in A'y'$, deci $AC \equiv A'C'$, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C' \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$.

5) *Simetricul unui plan este tot un plan*, se demonstrează uşor, ca o urmare a faptului că o dreaptă se transformă într-o dreaptă.

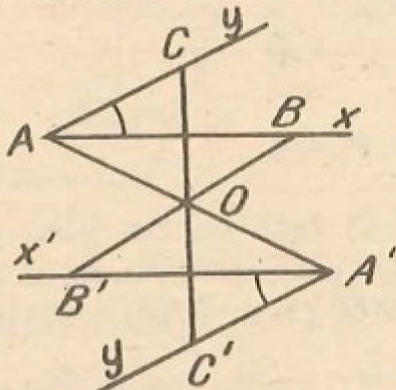


Fig. 17.2

Observaţie. Cele 5 consecinţe de mai sus provin numai din teorema care ne asigură păstrarea distanţei, deci sînt valabile pentru orice transformare care păstrează distanţa, nu numai pentru simetria faţă de un punct. Deci, în cele ce urmează este de ajuns să arătăm că transformarea pe care o descriem este o izometrie, pentru ca toate consecinţele să fie valabile.

SIMETRIA FAŢĂ DE O DREAPTĂ

Fiind dată în spaţiu o dreaptă (a), numită axă de simetrie, două puncte (P şi P') sînt simetrice unul faţă de celălalt, dacă axa de simetrie este mediatoarea segmentului PP' care le uneşte. Cu alte cuvinte, ducînd din P perpendiculara PO pe a ($O \in a$) şi prelungind-o cu segmentul $OP' \equiv OP$, punctul P' se numeşte simetricul lui P. Să arătăm că simetria faţă de o axă este o izometrie (păstrează distanţa).

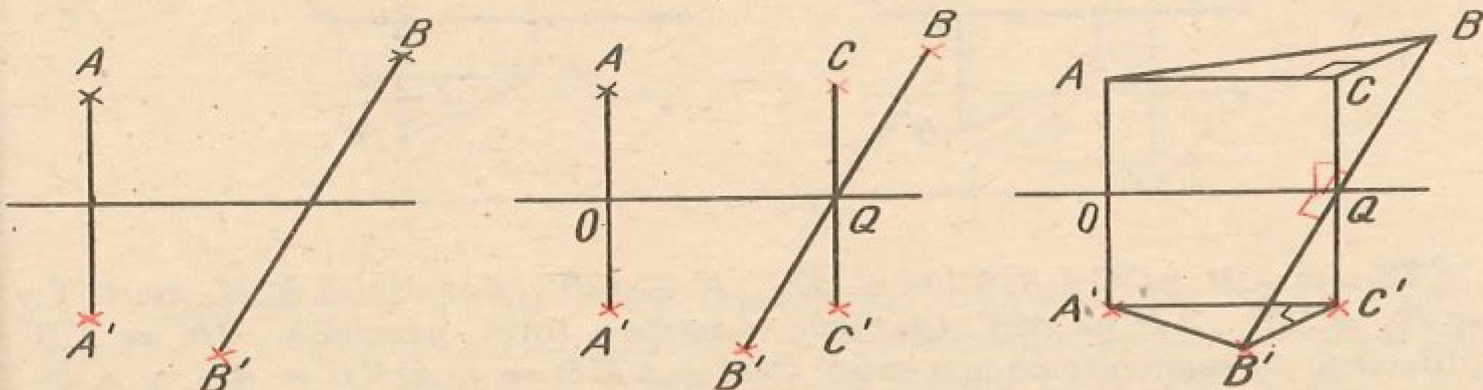


Fig. 17.3

Fie în spaţiu A, A' simetrice faţă de a şi B, B' simetrice faţă de a (fig. 17.3). Prin Q, mijlocul segmentului BB', ducem segmentul CC', congruent şi paralel cu AA', astfel încît CC' să aibă mijlocul tot în Q. Planul determinat de CC', şi BB' este perpendicular pe a. În acest plan, $\triangle CBQ \equiv \triangle C'B'Q'$. Dar şi $AC \equiv A'C'$, ca laturi opuse ale unui dreptunghi. Ştiind că $AC \parallel A'C' \parallel OQ$, deci AC şi $A'C'$ sînt perpendiculare pe planul $(BB'C)$, deci $AC \perp CB$, $A'C' \perp C'B'$. Rezultă congruenţa triunghiurilor dreptunghice ACB şi $A'C'B' \Rightarrow AB \equiv A'B'$. Deci, simetria faţă de o axă păstrează distanţa. Deci şi coliniaritatea, coplanaritatea şi congruenţa unghiurilor.

SIMETRIA FAŢĂ DE UN PLAN

Simetricul unui punct (A) faţă de un plan (α) este simetricul punctului faţă de proiecţia sa pe plan. Cu alte cuvinte, dacă ducem $AO \perp \alpha$ şi prelungim segmentul AO cu $OA' \equiv AO$ (fig. 17.4), obţinem simetricul A' al lui A.

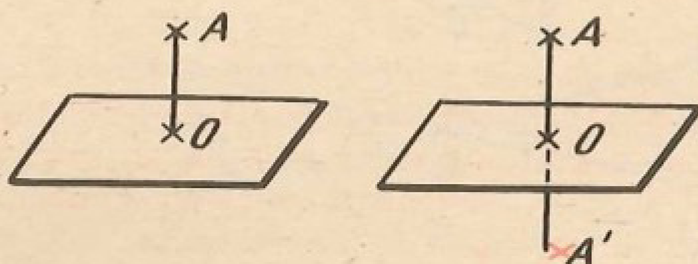


Fig. 17.4

Să arătăm că această simetrie păstrează şi ea distanţa dintre două puncte. Fie A' simetricul lui A şi B' simetricul lui B faţă de planul α (fig. 17.5). $OA \equiv OA'$, $BC \equiv CB'$, $AO \perp \alpha$, $BC \perp \alpha$. Evident, $AA' \parallel BB'$ (perpendiculare pe acelaşi plan), deci AA' şi BB' sînt coplanare.

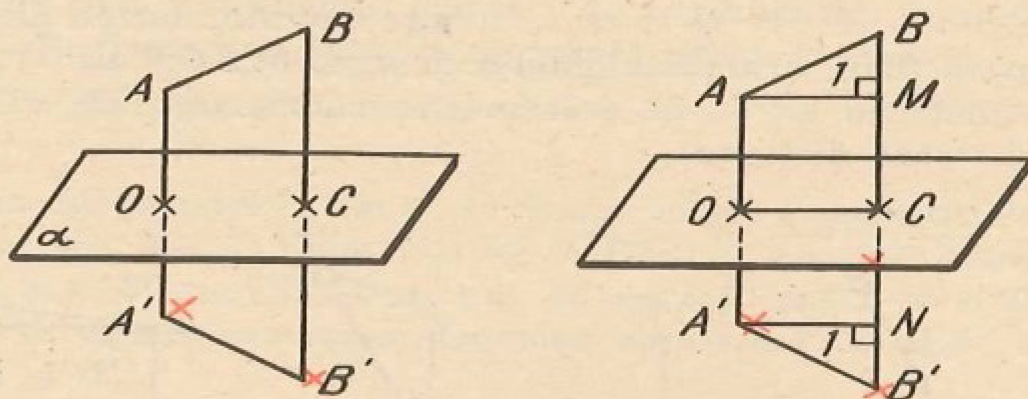


Fig. 17.5

Ducem $AM \parallel OC \parallel A'N$ $(M \in BC,\ N \in CB')$. Rezultă că $\sphericalangle M_1 \equiv \sphericalangle N_1$, $\sphericalangle M_1 = 90°$, $AM \equiv A'N$ (paralele cuprinse între paralele), $BM \equiv NB'$ (diferenţe de segmente congruente). Deci $\triangle AMB \equiv \triangle A'NB' \Rightarrow AB \equiv A'B'$. Consecinţele 1 ... 5 operează deci.

TRANSLAȚIE ÎN SPAȚIU

Fie AB un segment în spațiu, cu vîrfurile în ordinea scrisă (un vector). Să explicăm ce înseamnă să translatăm un punct M în spațiu cu vectorul $\overrightarrow{AB}$ (fig. 17.6). Considerăm pentru aceasta planul α determinat de A, B, M.

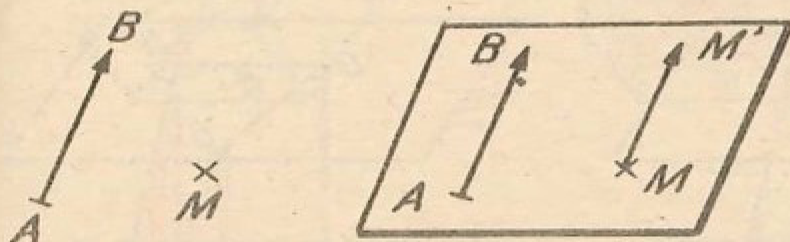


Fig. 17.6

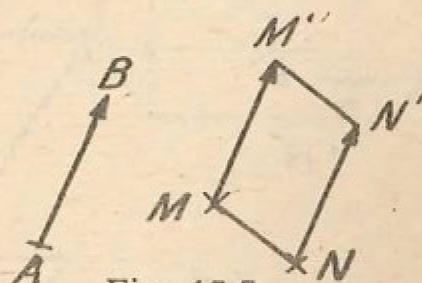


Fig. 17.7

În acest plan considerăm vectorul $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Spunem că M' este obținut printr-o translație în spațiu a punctului M cu vectorul $\overrightarrow{AB}$. Este oare translația în spațiu și ea o izometrie? Să translatăm cu vectorul $\overrightarrow{AB}$ punctele M și N în M' și N' (fig. 17.7). Constatăm că patrulaterul $MNN'M'$ este un paralelogram ($MM' \equiv NN'$, $MM' \parallel NN'$, prin tranzitivitatea congruenței și paralelismului cu $\overrightarrow{AB}$). Rezultă, de aici, congruența segmentelor $NM \equiv N'M'$.

ROTAȚIE ÎN JURUL UNEI AXE

Se dau: o axă a și, într-un plan perpendicular pe ea, un unghi orientat $\measuredangle\theta$, cu vîrful pe axă (fig. 17.8). Ce înseamnă a roti punctul M din spațiu, cu unghiul $\measuredangle\theta$, în jurul axei a?

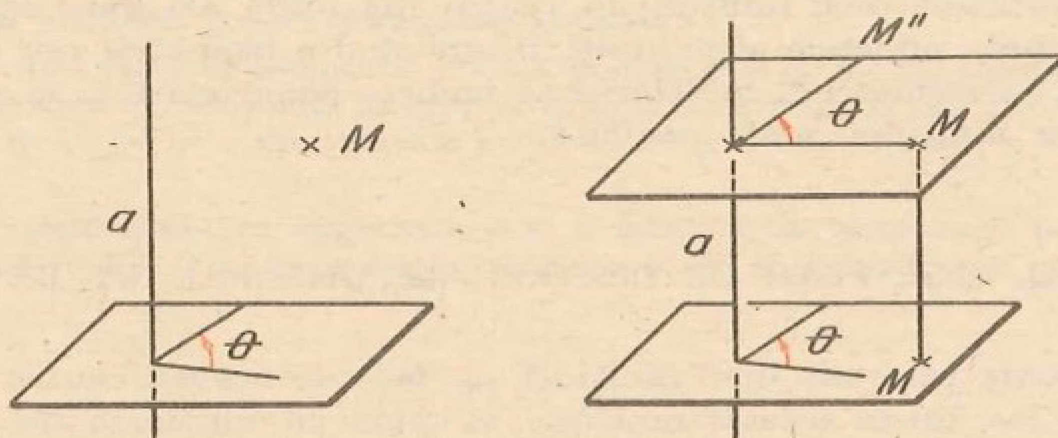


Fig. 17.8

Ducem $MM' \perp \alpha$, ($M' \in \alpha$). Considerăm translația de vector $\overrightarrow{M'M}$ a planului α. Planul translatat trece prin M, iar O devine, prin translație, $O' \in a$. Aplicăm lui M o rotație de unghi $\measuredangle\theta$, în planul translatat, și M'' va fi „rotitul" lui M în jurul axei a cu unghiul $\measuredangle\theta$.

Să demonstrăm că rotaţia în jurul unei axe este o izometrie. Dacă, prin rotaţia de axă a şi de unghi $\measuredangle\theta$, se duce A în A', aceasta se scrie $A'=R_{(a,\theta)}(A)$.

Să demonstrăm că dacă $R_{(a,\theta)}A=A'$ şi $R_{(a,\theta)}B=B'$, atunci $AB\equiv A'B'$. Proiectăm pe planul α, pe $O'B$ în OC şi pe $O'B'$ în OC' (vezi notaţiile din

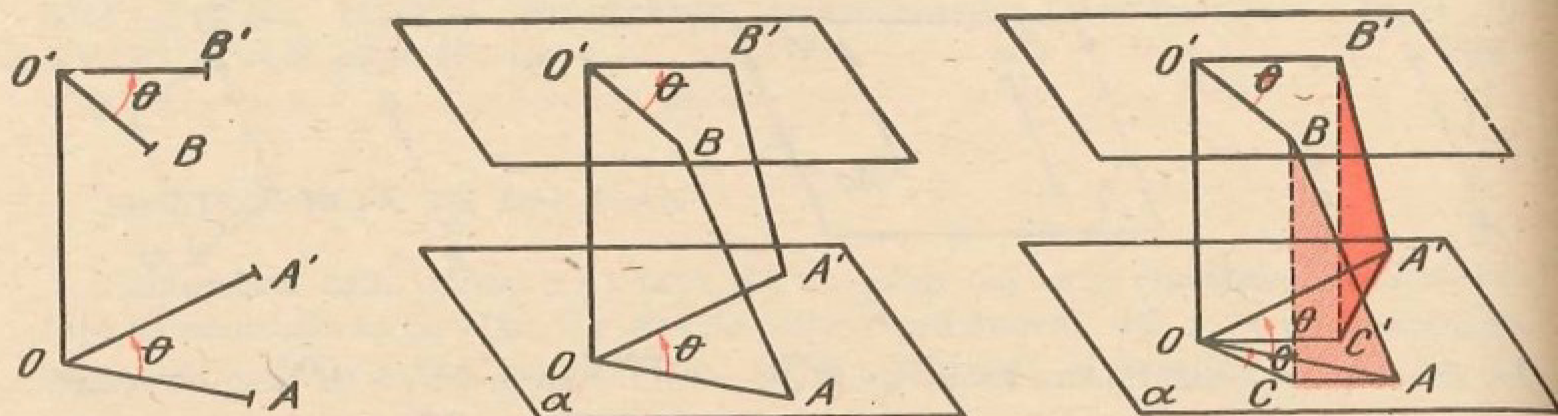


Fig. 17.9

figura 17.9). Rezultă: $\triangle OCA\equiv\triangle OC'A'$ (cazul 1 de congruenţă, unghiurile cu laturile respectiv congruente, fiind diferenţe dintre unghiuri congruente cu acelaşi unghi). De aici rezultă congruenţa triunghiurilor dreptunghice BCA şi $B'C'A'$ (catete congruente), deci $AB\equiv A'B'$ q.e.d.

CONGRUENŢA FIGURILOR ÎN SPAŢIU

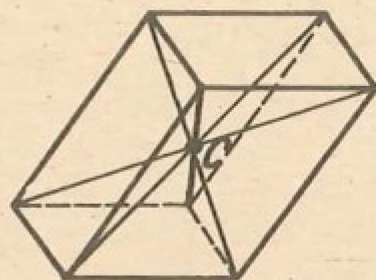
Dacă punctele unei mulţimi în spaţiu (de pildă ale unui corp) se obţin toate din toate punctele altei mulţimi, aplicînd o izometrie sau o compunere de mai multe izometrii*, mulţimile se numesc congruente şi se spune că am suprapus o mulţime peste cealaltă.

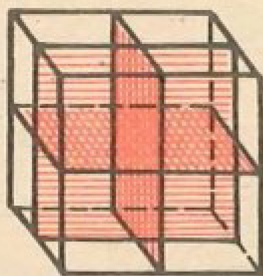
CENTRU, AXĂ, PLAN DE SIMETRIE ALE UNEI MULŢIMI DE PUNCTE

Dacă toate punctele unei mulţimi au, faţă de acelaşi centru de simetrie, simetricele lor tot în această mulţime, se spune că mulţimea are un centru de simetrie.

În mod asemănător se vorbeşte de axa, sau de planul, de simetrie al unei mulţimi de puncte (de pildă corp).

* Care este în fond tot o izometrie!





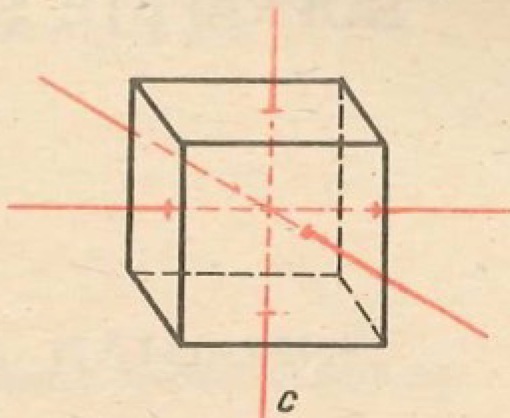


Fig. 17.10

Paralelipipedul are un centru de simetrie care este intersecția diagonalelor (fig. 17.10, a), dar numai cel dreptunghic are plane de simetrie: planele mediatoare ale muchiilor (fig. 17.10, b) și axe de simetrie: dreptele care unesc mijloacele fețelor opuse (fig. 17.10, c).

PROBLEME 17

1. Care sînt planele de simetrie ale unui diedru?

2. Care sînt planele de simetrie a două plane distincte? Discuție (după cum ele sînt paralele sau secante).

3. Dar care sînt axele de simetrie a acestor plane?

4. Cîte centre, axe și plane de simetrie are un cub?

5. Cîte centre, axe și plane de simetrie are un tetraedru regulat?

6. Care sînt prismele regulate, care au centru de simetrie? Dar axe? Dar plane? Cîte?

7. Aceleași întrebări pentru piramidele regulate.

8. Se dau, în spațiu, o dreaptă d și două puncte P și Q. Se iau simetricele P' ale punctului P față de fiecare punct al dreptei d, apoi simetricele Q' ale fiecărui punct al dreptei d față de Q. Să se arate că toate punctele P' și Q' sînt situate în același plan α paralel cu d.

9*. Un triunghi ABC, cu unghiurile B și C ascuțite, se proiectează pe un plan α, care conține latura BC. Fie A' proiecția lui A pe α. Să se demonstreze că $\sphericalangle BA'C > \sphericalangle BAC$.

SUPRAFEȚE ȘI CORPURI ROTUNDE

GENERALITĂȚI. CONSIDERAȚII INTUITIVE

a. În capitolele de geometrie în spațiu de pînă acum, am studiat figuri geometrice formate din linii drepte sau porțiuni de linii drepte (segmente), suprafețe plane sau porțiuni de suprafețe plane (poligoane) și corpuri mărginite de astfel de suprafețe.

Viața de toate zilele și diverse alte activități ne pun însă mereu în contact cu linii curbe, cu suprafețe curbe, cu corpuri mărginite de suprafețe curbe, pe care, în mod obișnuit, le numim *corpuri rotunde*.

Nu avem intenția să dăm definiția generală a unei linii curbe sau a unei suprafețe curbe (aceasta necesită cunoașterea noțiunii de continuitate, care se predă abia în clasa a XI-a).

În acest paragraf intenționăm să descriem cîteva fapte intuitive, care să contureze mai bine aceste noțiuni. Abia în paragrafele următoare, unde vom defini și studia cîteva suprafețe curbe particulare, vom folosi un limbaj matematic precis.

b. Un punct în mișcare descrie o linie curbă (fig. 18.1); nu orice linie curbă este conținută într-un plan.

Un fir de ață, indiferent cum l-am deforma, ne sugerează o linie curbă (fig. 18.1).

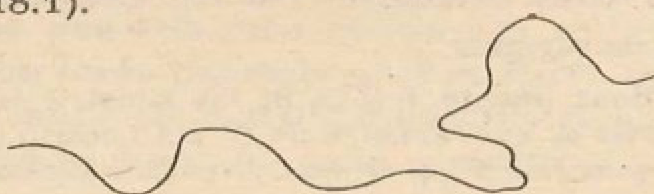


Fig. 18.1

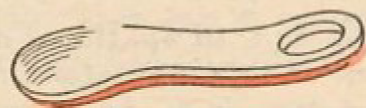


Fig. 18.2

Muchia unui corp este, în general, o linie curbă (fig. 18.2).

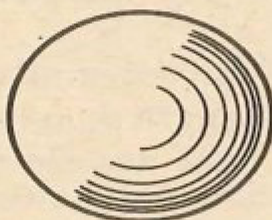
Evident că noi considerăm linia dreaptă ca un caz particular al liniei curbe. Pozițiile diferitelor puncte pe o linie curbă dată se pot preciza, dacă am fixat un punct pe acea curbă ca origine, prin distanțele pe curbă de la ele pînă la acel punct, deci printr-un număr real (fig. 18.3).

O curbă „n-are nici lățime, nici grosime“, ci numai lungime.

Fig. 18.3

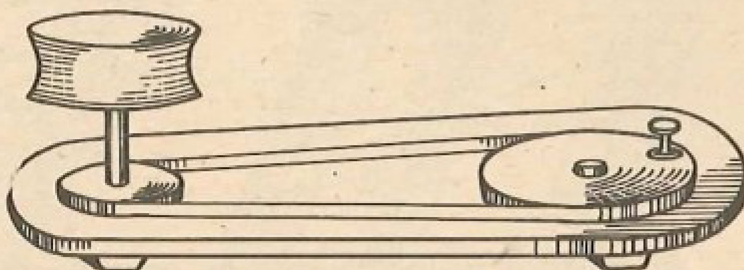


c. O suprafață curbă este fața (imaginea) unui corp rotund (fig. 18.4). O țesătură, deformată chiar, este o suprafață curbă (fig. 18.5).

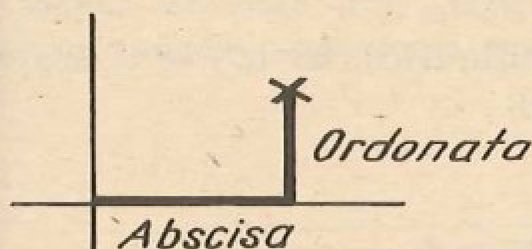

Fig. 18.4

Țesătura este formată din fire; o linie curbă în mișcare descrie (generează) o suprafață curbă (fig. 18.5 și 18.6).


Fig. 18.5


Fig. 18.6

Poziția unui punct pe o suprafață curbă se poate preciza numai dînd două coordonate ale sale (fig. 18.7).



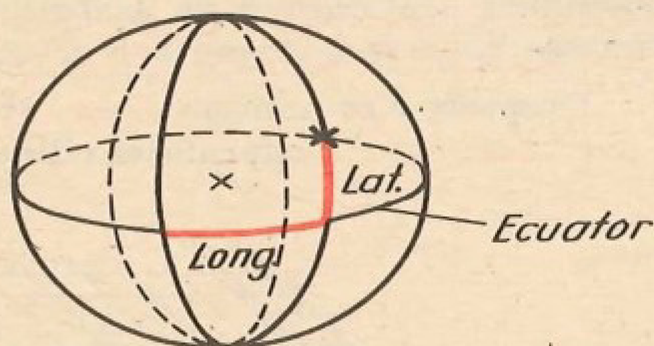


Fig. 18.7

d. Oricum am lua o linie curbă și un fir de ață, putem deforma acest fir, fără a-l întinde sau rupe, astfel încît el să coincidă cu linia curbă dată (fig. 18.8).



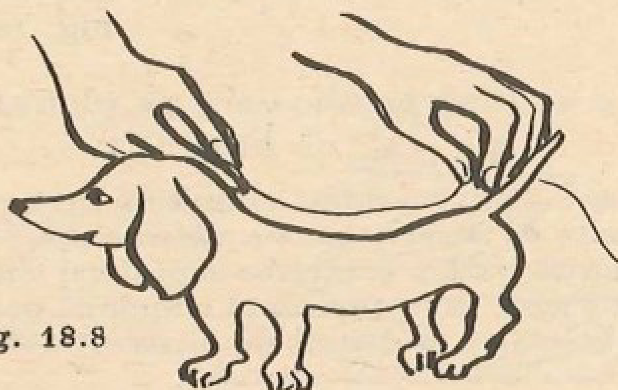


Fig. 18.8

Acest fapt nu este adevărat pentru suprafețe. Nu putem așeza o foaie de hîrtie peste o minge, fără a o „strica". Aceasta face ca desenarea unui planiglob să fie dificilă și să nu se poată face decît obținînd o imagine deformată a suprafeței Pămîntului.

e. *Suprafețe cilindrice.* Am afirmat că orice linie curbă în mișcare descrie o suprafață curbă. O linie dreaptă d, care se mișcă paralel cu ea însăși, întîlnind în permanență o dreaptă dată descrie un plan (fig. 18.9).

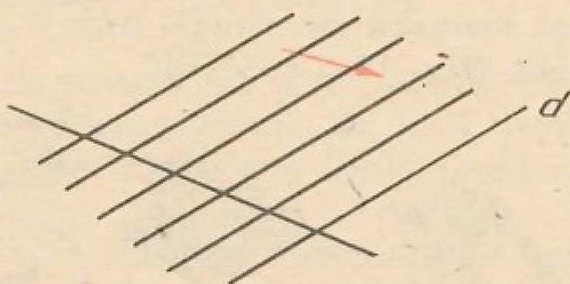


Fig. 18.9

Știm că o linie dreaptă d, care se mișcă paralel cu poziția ei inițială, întîlnind în permanență un poligon plan $(\mathcal{P})$ dat, situat într-un plan neparalel cu d, descrie o suprafață prismatică. Să înlocuim acum poligonul $(\mathcal{P})$ cu o linie curbă oarecare fixată. Sîntem conduși astfel la următoarea:

Definiție. *Fie (C) o curbă plană și a o dreaptă dată neparalelă cu planul curbei (C). Totalitatea punctelor dreptelor d ce trec prin punctele lui (C) și sînt paralele cu a, formează suprafața cilindrică de bază (C) și direcție a.*

Dreptele d se numesc *generatoarele* suprafeței cilindrice, iar (C) se numește *curba directoare* a suprafeței cilindrice (fig. 18.10).

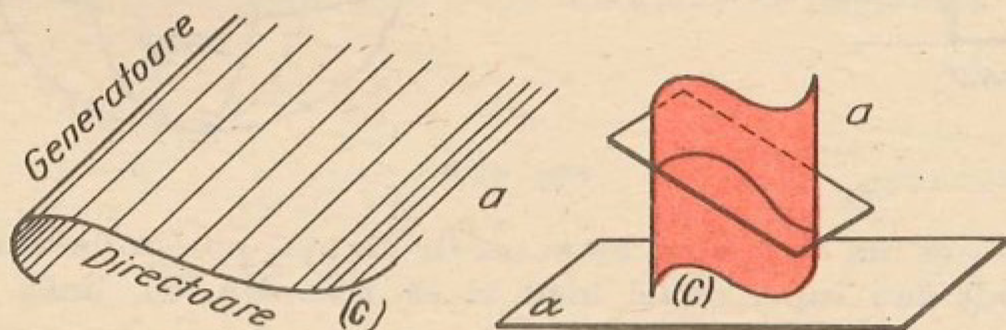


Fig. 18.10

Dacă a este perpendiculară pe planul lui (C) suprafața se numește *suprafață cilindrică dreaptă,* de bază (C).

Observație. Pe o suprafață cilindrică dată există multe curbe plane (intersecția suprafeței cilindrice cu diverse plane). Oricare din ele, care intersectează toate generatoarele, poate fi folosită pentru generarea suprafeței cilindrice, ca în definiția de mai sus.

În acest mod, orice suprafață cilindrică poate apărea ca suprafață cilindrică dreaptă, (dacă vom considera ca directoare intersecția ei cu un plan perpendicular pe generatoare).

O linie curbă plană poate fi un arc, o curbă închisă, sau poate avea autointersecţii (fig. 18.11).



Fig. 18.11

Suprafeţele cilindrice generate au forme corespunzătoare celor din fig. 18.12.

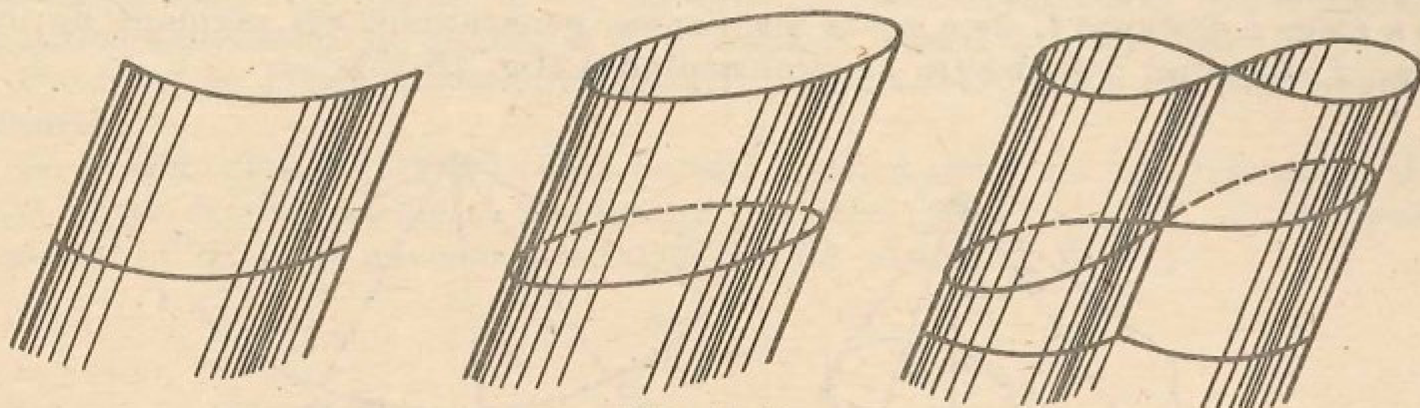


Fig. 18.12

O proprietate importantă a suprafeţei cilindrice generate de un arc simplu este aceea că ea se poate „desfăşura" şi aşeza pe o suprafaţă plană. Cel mai simplu se vede acest lucru reprezentînd suprafaţa ca o suprafaţă cilindrică dreaptă de bază (C), „îndreptînd" (C) pînă la o dreaptă d şi apoi aşezînd generatoarele suprafeţei perpendicular pe g.

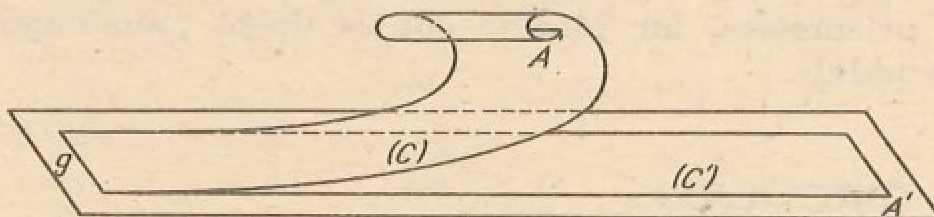
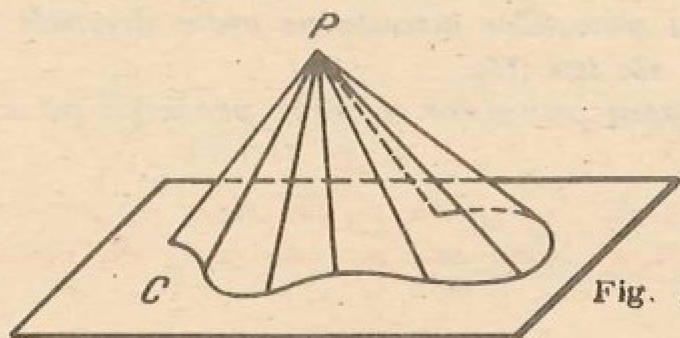


Fig. 18.13

f. *Pînze conice.* Fie (C) o curbă plană şi P un punct situat în afara planului ei. Totalitatea semidreptelor cu originea în P şi avînd un punct situat pe



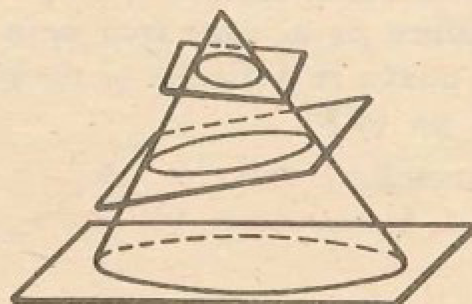


Fig. 18.14

(C) formează pînza conică de vîrf P şi bază (C). Semidreptele se numesc *generatoare* ale pînzei conice (fig. 18.14).

Observaţie. Pe o pînză conică există multe curbe plane (intersecţiile ei cu diferite plane). Oricare din ele, care intersectează toate generatoarele, poate fi considerată că generează pînza conică.

Pînzele conice pot fi generate şi de curbe în spaţiu.

Şi pînzele conice generate de arce de curbă, „suficient de scurte", pot fi desfăşurate şi aşezate pe un plan. Cel mai simplu mod de a face aceasta este de a alege o distanţă l, de a aşeza pe fiecare generatoare un segment de lungime l, obţinînd o curbă (în general neplană) (fig. 18.15).

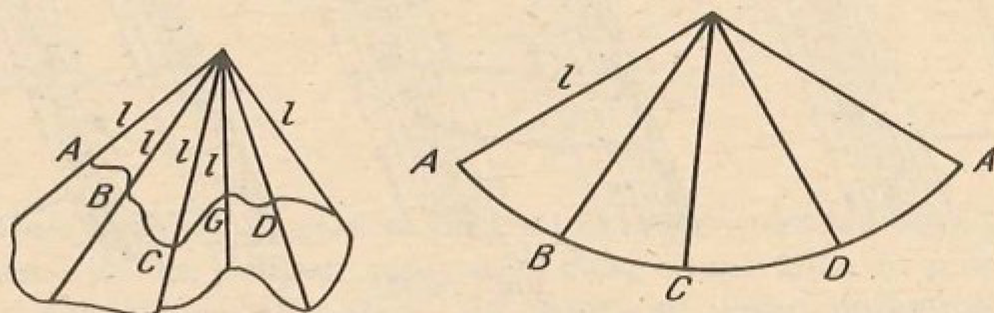


Fig. 18.15

Aşezăm curba peste un arc de cerc de rază l (ceea ce este posibil dacă lungimea curbei nu depăşeşte $2\pi l$) şi generatoarele respective peste razele corespunzătoare ale cercului.

g. *Observaţie.* Suprafeţele cilindrice ne-au apărut drept „analoagele curbe" ale suprafeţelor prismatice, iar pînzele conice drept „analoagele curbe" ale suprafeţelor piramidale.

CILINDRII CIRCULARI

Definiţie. a) *Fie* (C) *un cerc situat în planul* α *şi* a *o dreaptă neparalelă cu* α. *Prin suprafaţă cilindrică circulară generată de* (C) *şi* a, *înţelegem totalitatea punctelor situate pe toate dreptele paralele cu* a, *care trec prin puncte ale lui* (C).

b) *Prin suprafaţă cilindrică circulară dreaptă generată de cercul* (C) *din planul* α, *înţelegem suprafaţa cilindrică generată de* (C) *şi de o perpendiculară* a *pe* α. *Aceasta este, de fapt, totalitatea punctelor situate pe toate dreptele perpendiculare pe* α, *care trec prin puncte ale lui* (C).

Ea poate fi definită şi drept *totalitatea punctelor a căror proiecţii pe* α *sînt situate pe* (C).

Teoremă. *Intersecţia dintre o suprafaţă cilindrică şi un plan* β, *paralel cu planul* α, *al cercului* (C) *care o generează, este un cerc de rază* R, *egală cu cea a lui* (C).

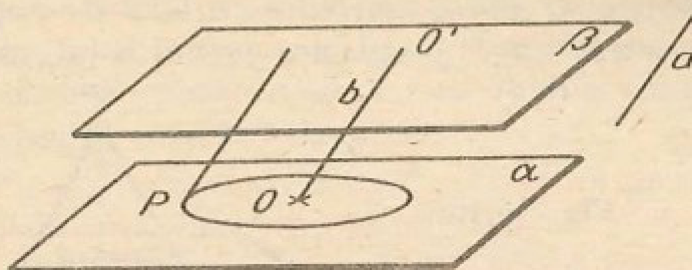


Fig. 18.16

Demonstrație. Fie O centrul lui (C), b paralela (fig. 18.16) prin O la a și O' intersecția lui b cu planul α. Să arătăm că intersecția lui β cu suprafața cilindrică este cercul de centru O' și de rază R, situat în planul β.

Fie $P' \in \beta$. Îl considerăm diferit de O', deoarece O' nu se află pe suprafața cilindrică.

Să ducem planul $(P'OO')$ (unic determinat). Acest plan taie planele α și β după două drepte paralele. Ducînd și paralela din P' la OO', se formează în planul $(P'OO')$ un paralelogram $P'O'OP$ $(P \in \alpha)$ (fig 18.17).

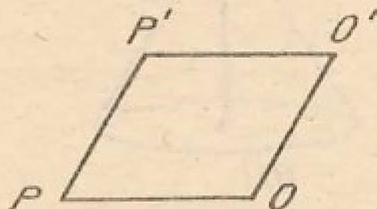


Fig. 18.17

Punctul P' se află pe suprafața cilindrică, dacă și numai dacă, $P \in (C)$, deoarece $P'P \parallel O'O \parallel a$, adică dacă și numai dacă, $PO = R$. Cum $P'O' = PO$, $PO = R$ este echivalent cu $P'O' = R$ și teorema este demonstrată.

Definiție. *Prin cilindru circular, înțelegem corpul geometric cuprins între o suprafață cilindrică circulară și două plane distincte paralele cu planul cercului ce generează suprafața cilindrică.*

Cilindrul circular se numește cilindru circular drept dacă suprafața cilindrică circulară corespunzătoare este dreaptă.

PÎNZE CONICE CIRCULARE

Definiție. *Fie (C) un cerc și P un punct nesituat în planul α al cercului. Se numește pînză conică circulară de vîrf P și bază (C), totalitatea punctelor situate pe semidreptele cu originea în P ce întîlnesc cercul (C)* (fig. 18.18).

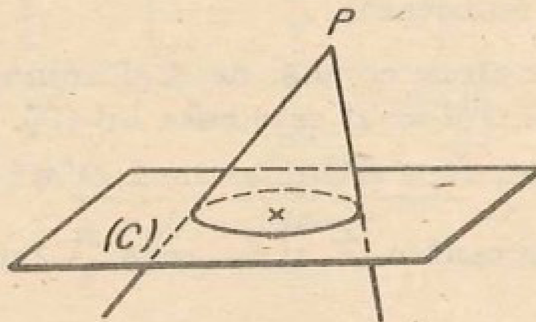


Fig. 18.18

Definiție. *O pînză conică circulară de vîrf P și bază (C) se numește dreaptă dacă proiecția lui P pe planul cercului (C) este centrul lui (C).*

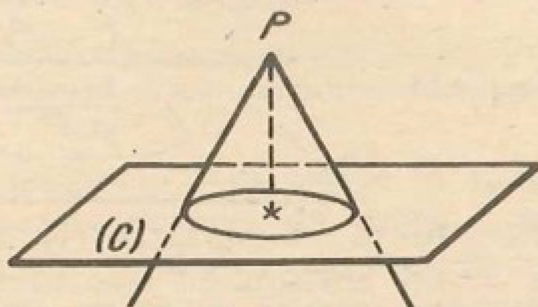


Fig. 18.19

Definiție. *Se numește con circular, corpul geometric mărginit de o pînză conică circulară și de planul cercului, care generează pînza conică. Dacă pînza conică circulară este dreaptă atunci conul circular se numește drept* (fig. 18.20).

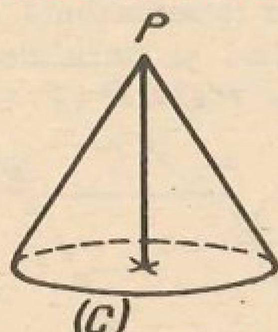


Fig. 18.20

Teoremă. *Secțiunea unei pînze conice circulare printr-un plan paralel cu baza, situat de aceeași parte a vîrfului cu ea, este un cerc.*

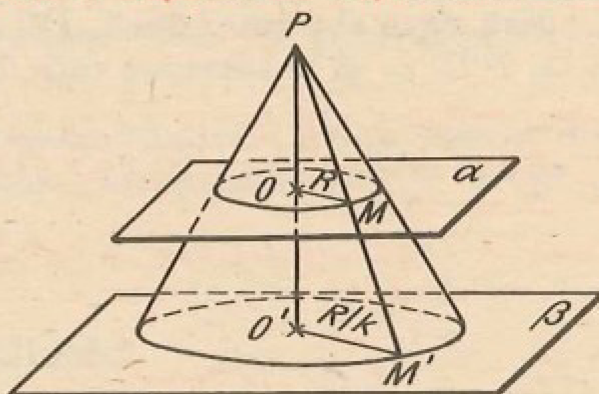


Fig. 18.21

Demonstrație. Fie P vîrful conului, (C) cercul de bază, O centrul său, α planul cercului (C) și β un plan paralel cu planul α. Să considerăm intersecția O' a lui PO cu planul β. Să alegem $M' \in \beta$ $(M' \neq O')$ (fig. 18.21).

Planul $(M'OP)$ taie planul α după o dreaptă $OM \parallel O'M'$. Fie $M \in PM'$. Avem $\frac{OM}{O'M'} = \frac{PO}{P'O'} = k$ (constant).

Punctul M' se află pe pînza conică, dacă și numai dacă, M se află pe (C), deci, dacă și numai dacă, $OM = R$ este raza lui (C). Conform relației de mai sus, aceasta este adevărată, dacă și numai dacă, $O'M' = \frac{R}{k}$, ceea ce înseamnă că M' se află pe cercul de centru O' și de rază $\frac{R}{k}$, situat în planul β.

Comentariu. Centrele cercurilor de secțiune sînt coliniare cu vîrful, deci, înlocuind cercul generator al unei pînze conice circulare drepte cu un cerc dintr-un plan paralel cu acesta, situat pe pînza conică, se obține un alt cerc generator în raport cu care pînza conică este tot dreaptă.

Definiție. *Se numește trunchi de con circular, corpul mărginit de o pînză conică circulară, de baza acesteia și de un plan paralel cu ea, situat de aceeași parte a vîrfului ca și baza. Trunchiul de con se numește drept, dacă pînza conică circulară este dreaptă.*



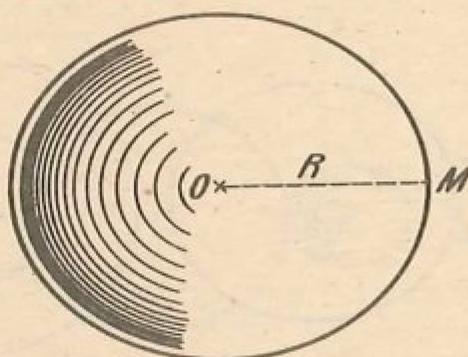
Fig. 18.22

Observație. Un trunchi de con circular este drept, dacă și numai dacă, dreapta ce unește centrele bazelor este perpendiculară pe planele bazelor.

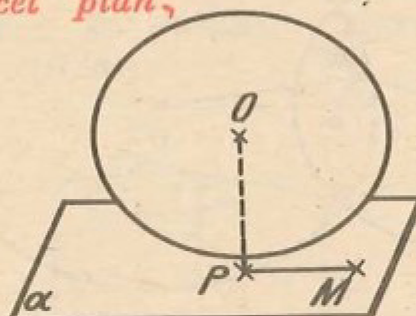
SFERA

Definiție. *Se numește sferă de centru O și rază $R > 0$, locul geometric al punctelor M din spațiu, pentru care $OM = R$.*

Fig. 18.23

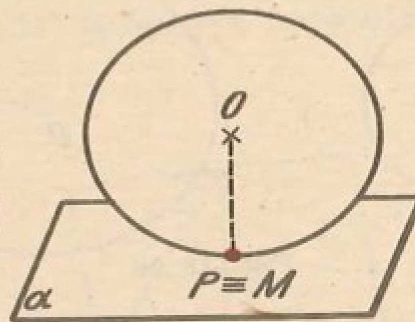


Teoremă. *Intersecția dintre un plan și o sferă este sau vidă, sau formată dintr-un singur punct, sau un cerc avînd drept centru proiecția centrului sferei pe acel plan.*



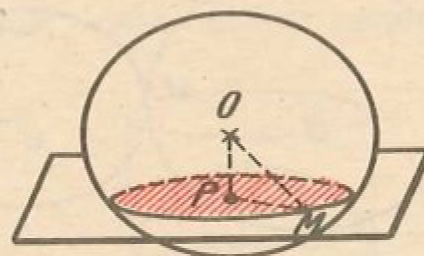
$R < OP < OM$

Fig. 18.24



$OP \equiv OM = R$

Fig. 18.25



$OP < R$

Fig. 18.26

Demonstrație. Fie O centrul sferei, R raza sa și fie α un plan. Ceea ce cere enunțul este de a determina locul geometric al punctelor M din α, pentru care $OM = R$.

Fie P piciorul perpendicularei din O pe planul α.

Dacă $R < PO$, cum $OM > OP$, oricare ar fi $M \in \alpha$, atunci nu există puncte M pentru care $OM = R$ (fig. 18.24).

Dacă $R = OP$, atunci $OM = R$, $M \in \alpha$ este posibil numai pentru $M = P$ (fig. 18.25), oblicele fiind mai lungi decît perpendiculara. În acest caz intersecția se reduce la punctul P.

Dacă $R > OP$, atunci $OM = R$ este echivalent cu $MP = \sqrt{R^2 - OP^2}$, deoarece $OP \perp PM$, și deci, intersecția este cercul de centru P și rază $\sqrt{R^2 - OP^2}$ (fig. 18.26).

Teoremă. *Intersecția a două sfere distincte este sau vidă, sau formată dintr-un singur punct, sau un cerc.*



Fig. 18.27

Demonstrație. Este clar că dacă sferele sînt concentrice distincte intersecția lor este vidă.

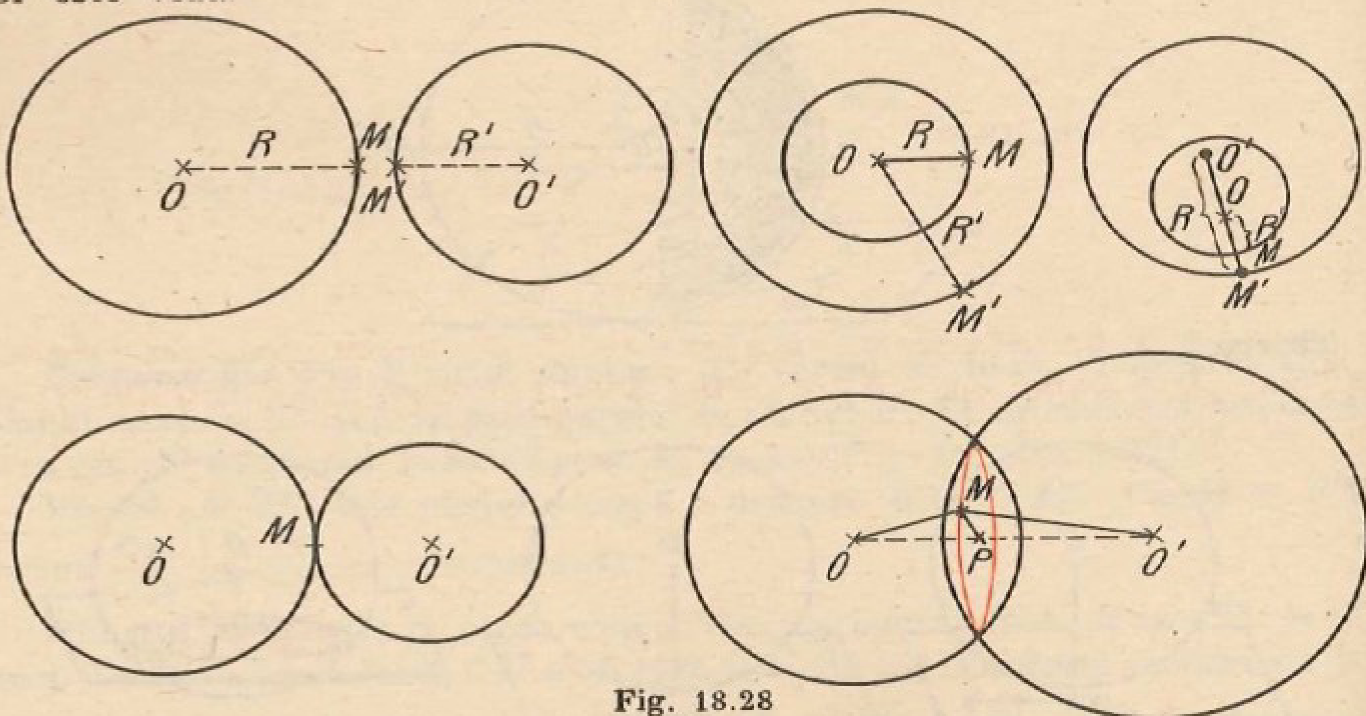


Fig. 18.28

Fie O, O' centrele sferelor și R, R' razele lor. Fie M un punct comun al celor două sfere. Avem $MO = R$ și $MO' = R'$, $OO' =$ constant (fig. 18.27).

Existența lui M reclamă $OO' \leqslant OM + O'M = R + R'$. Deci dacă $R + R' < OO'$, intersecția este vidă (fig. 18.28). Același lucru se întîmplă dacă $OO' < |R - R'|$.

Dacă $OO' = R + R'$ sau dacă $OO' = |R - R'|$, atunci M trebuie să se afle pe OO', într-un punct bine determinat de $OM = R$, $O'M = R'$, deci, în acest caz, intersecția se reduce la un punct.

În fine, dacă $|R - R'| < OO' < R + R'$, atunci, în orice plan ce trece prin dreapta OO', putem construi un triunghi (neredus la o dreaptă) MOO' cu $MO = R$, $MO' = R'$.

Să observăm că triunghiul MOO' este bine determinat, fiind date vîrfurile O, O' ca și lungimile laturilor OM și $O'M$. În particular, lungimile OP și MP, unde P este piciorul perpendicularei din M pe OO', sînt bine determinate (faptul că P este de aceeași parte a lui O ca și O' sau nu, de asemenea, este bine determinat), P este deci fix. M este situat în planul β perpendicular pe OO' în P, la distanță fixă de P, deci descrie un cerc de centru P, situat în planul β.

TANGENȚA SUPRAFEȚELOR CURBE

În cazul cînd intersecția dintre o sferă și un plan este formată dintr-un singur punct, spunem că planul este *tangent* la sferă (fig. 18.29).

În cazul cînd intersecția a două sfere este formată dintr-un singur punct, spunem că sferele sînt *tangente*.

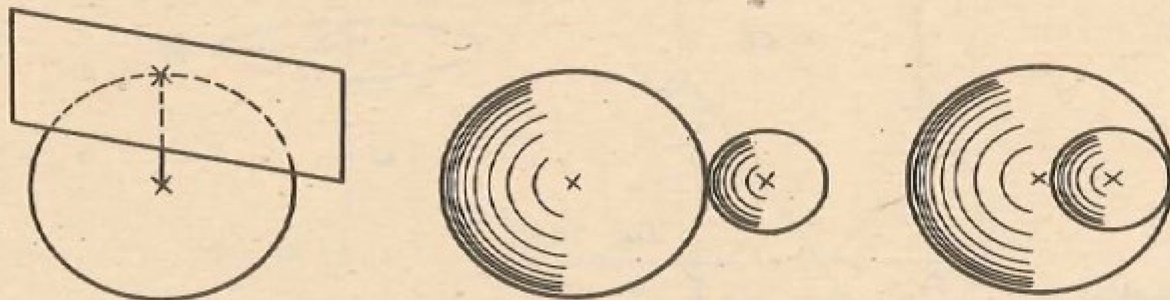
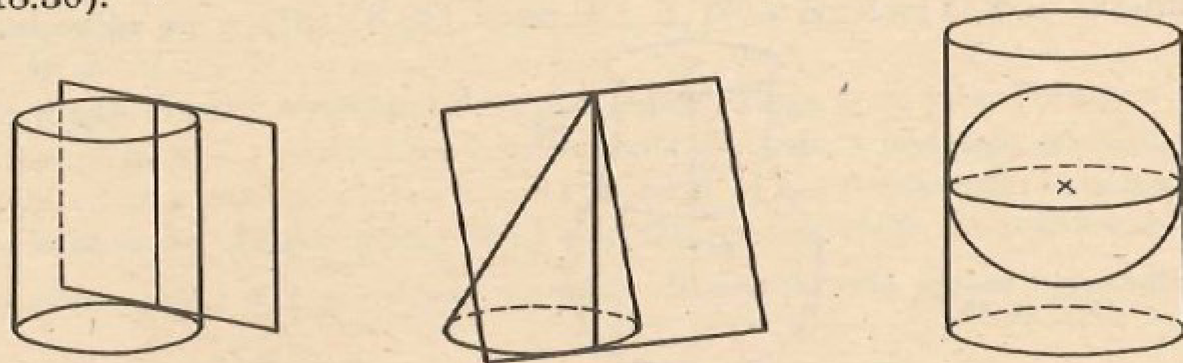


Fig. 18.29

Nu totdeauna două suprafețe tangente au un singur punct comun. Fără a încerca să definim riguros tangența suprafețelor, dăm cîteva exemple (fig. 18.30).



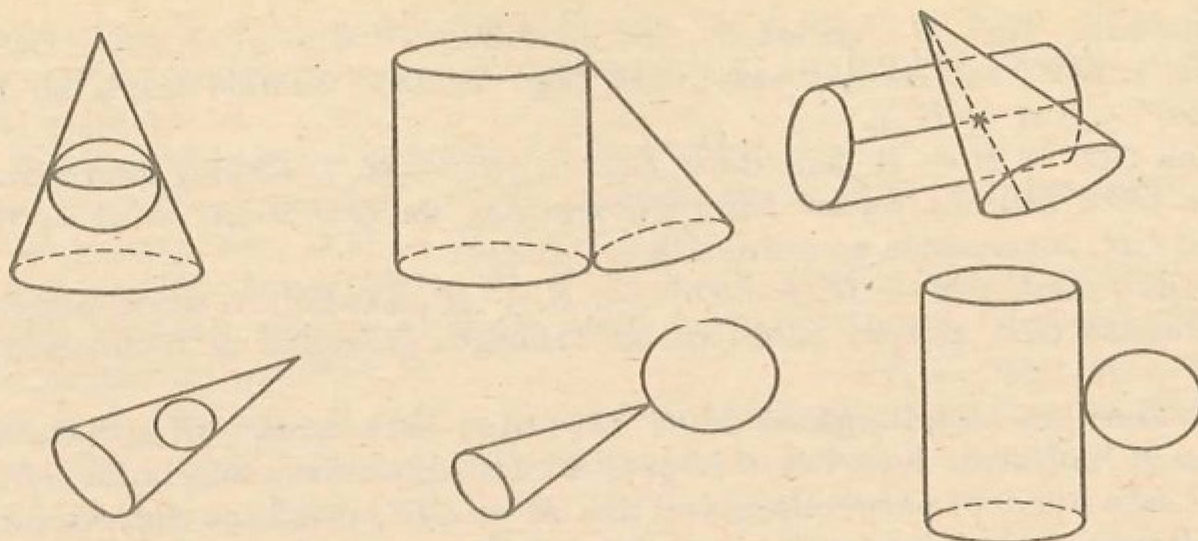


Fig. 18.30

SUPRAFEŢE DE ROTAŢIE

Observaţie. Dacă aplicăm unui punct M toate rotaţiile în jurul unei drepte a, obţinem, dacă $M \notin a$, toate punctele cercului ce trece prin M, situat în planul perpendicular pe a şi care conţine pe M, cerc cu centrul în proiecţia lui M pe a (fig. 18.31).



Fig. 18.31

Definiţie. ***Fie a o dreaptă şi (C) o curbă. Se numeşte suprafaţă de rotaţie în jurul lui a, generată de (C), totalitatea punctelor ce se obţin aplicînd tuturor punctelor de pe (C) toate rotaţiile în jurul lui a*** (fig. 18.32).

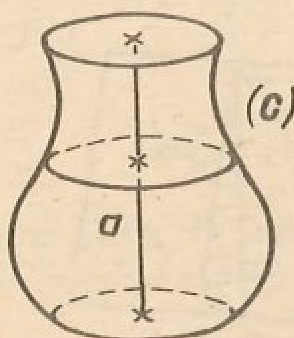


Fig. 18.32

Conform observației precedente, suprafața de rotație se poate defini și ca totalitatea punctelor situate pe toate cercurile avînd centrele pe a, conținute în plane perpendiculare pe a și care au puncte comune cu (C).

Teoremă. *Suprafața de rotație a unei drepte d în jurul unei drepte paralele cu ea este o suprafață cilindrică circulară dreaptă.*

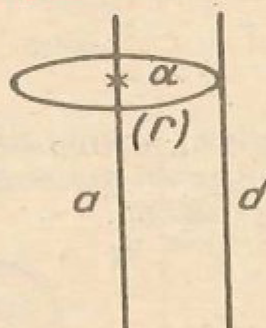


Fig. 18.33

Demonstrație. Să considerăm suprafața cilindrică dreaptă definită de un cerc (C) cu centrul pe a, situat într-un plan α perpendicular pe a și care trece prin intersecția lui α cu d (fig. 18.33). Dreapta d va fi o generatoare a ei, deci va fi conținută în ea. Secțiunile acestei suprafețe, prin plane perpendiculare pe a, vor fi toate cercurile de raze congruente cu razele lui (C), cu centrele pe a. Deci, cu centrul în orice punct dat al lui a, putem duce, într-un plan perpendicular pe a, un cerc care întîlnește d. Aceste cercuri „umplu" suprafața de rotație.

Teoremă. *Suprafața de rotație a unei semidrepte d în jurul unei drepte a ce trece prin originea ei O, neperpendiculară pe d, este o pînză conică circulară dreaptă.*

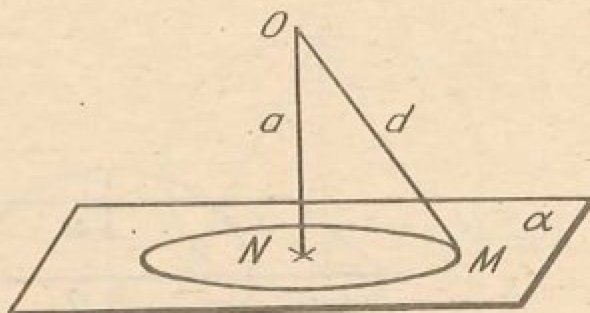


Fig. 18.34

Demonstrație. Să luăm un punct M pe d și să considerăm cercul (C) cu centrul în proiecția N a lui M pe a, situat în planul α ce trece prin M perpendicular pe a (fig. 18.34). Cum $d \not\perp a$, $N \neq O$, deci $O \notin \alpha$ și cum $d \neq a$, avem $M \neq N$.

Fie pînza conică circulară dreaptă generată de O și (C). Dreapta d este o generatoare a ei, iar secțiunile ei prin toate planele β paralele cu planul α sînt cercurile cu centrele în intersecția lui β cu a și care trec prin intersecția lui β cu d. Acestea sînt toate cercurile ce constituie suprafața de rotație în discuție.

Observație. Dacă $d \perp a$, atunci suprafața de rotație este planul perpendicular în O pe a.

Teoremă. a) *Suprafaţa de rotaţie a unui segment în jurul unei drepte paralele cu el este un cilindru circular drept.*

b) *Suprafaţa de rotaţie a unui segment în jurul unei drepte ce trece prin unul din capetele lui, neperpendicular pe ea, este un con circular drept.*

c) *Suprafaţa de rotaţie a unui segment în jurul unei drepte, coplanară cu el, ce nu-l intersectează şi nu e nici paralelă nici perpendiculară pe el, este un trunchi de con circular drept. Demonstraţia ei constituie o consecinţă imediată a celor de mai sus.*

Observaţie. În cazurile b), c) din teoremă, dacă dreapta este perpendiculară pe segment, se obţine un cerc (inclusiv interiorul său), respectiv o coroană circulară (cuprinsă între două cercuri concentrice) (fig. 18.35).

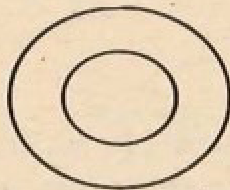


Fig. 18.35

Teoremă. *Suprafaţa de rotaţie a unui cerc (C) în jurul unui diametru al său este o sferă.*

Demonstraţie. Fie R raza lui (C). Fie (S) sfera de centru O, egal cu centrul lui (C) de rază R. Dacă α este planul lui (C), atunci (C) este intersecţia lui α cu (S).

Fie a o dreaptă care trece prin centrul cercului (C) şi care este conţinută în planul său. Să considerăm un plan arbitrar $\beta \perp a$, care taie sfera (fig. 18.36). El taie a după un punct M din interiorul lui (C), deci dreapta $d = \alpha \cap \beta$

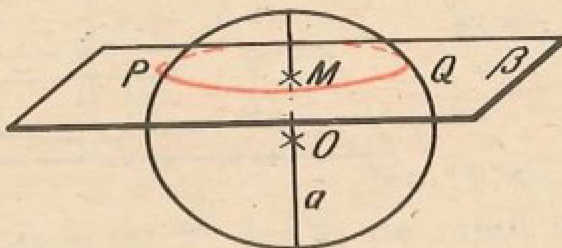
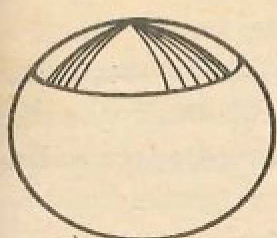
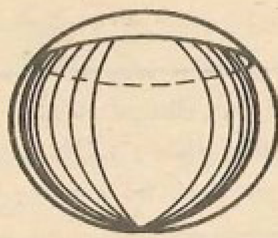
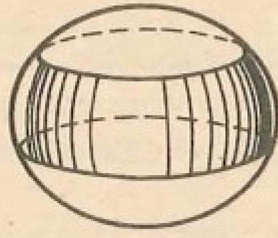


Fig. 18.36

taie (C) în două puncte P şi Q. Ştim că β taie sfera după un cerc, care trece prin P şi Q, avînd drept centru proiecţia lui O pe β, care este M. Aceste cercuri „vor umple" suprafaţa de rotaţie.

Definiţie. *Suprafaţa de rotaţie a unui arc de cerc, mai mic decît un semicerc, în jurul unui diametru ce trece prin unul din capetele sale, se numeşte calotă sferică. Dacă diametrul nu întîlneşte deloc arcul, suprafaţa se numeşte zonă sferică.*

calotă calotă zonă

Fig. 18.37

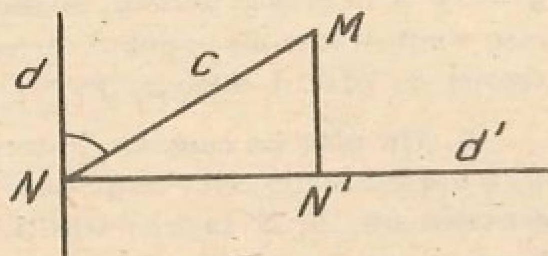


Fig. 18.38

Din cele de mai sus, rezultă că o calotă sferică poate fi considerată un caz particular de zonă sferică.

Să considerăm un plan α şi pe el două drepte d şi c, formînd un unghi ascuţit în N (fig. 18.38).

Aşezăm d pe generatoarea unui cilindru circular drept şi înfăşurăm apoi planul pe cilindru, astfel încît N' să vină în N şi M să se afle pe d. (Bineînţeles am presupus că lungimea cercului de bază al cilindrului este egală, ca măsură, cu segmentul NN'.) Perpendiculara în N pe d se va înfăşura pe cercul de bază al cilindrului. Dreapta c se va înfăşura determinînd o curbă numită elice. Filetul unui şurub este o elice.

Problemă rezolvată. Un con circular drept de rază R şi înălţime $2R$ este intersectat cu o sferă cu diametrul cît înălţimea conului şi cu centrul la jumătatea înălţimii conului, după un cerc. Să se afle raza cercului de secţiune, în funcţie de R.

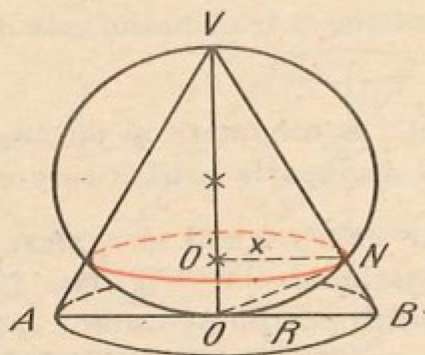


Fig. 18.39

Rezolvare. Din triunghiul dreptunghic VOB (fig. 18.39) deducem $VB^2 = VO^2 + OB^2$. Deci, $VB = R\sqrt{5}$.

Observăm că triunghiul VNO este, de asemenea, dreptunghic, fiind înscris într-un semicerc, deci VN este proiecţia lui VO pe VB. Deducem că: $4R^2 = VB \cdot VN$; $VN = \frac{4R^2}{\sqrt{5}R} = \frac{4R}{\sqrt{5}}$. Din $\triangle VO'N \sim \triangle VOB$, unde O' este centrul cercului de secţiune şi x raza sa, deducem:

$$\frac{VN}{VB} = \frac{x}{R}; \quad \frac{\frac{4R}{\sqrt{5}}}{R\sqrt{5}} = \frac{x}{R}, \quad x = \frac{4R}{5}.$$

1. Un cilindru se desfăşoară pe un plan după un dreptunghi, ale cărui diagonale sînt egale cu 2 a şi formează între ele un unghi de 120°. Să se afle raza şi generatoarea cilindrului.

2. Un cilindru circular drept, aşezat cu baza într-un plan orizontal, are generatoarea $g = 6\sqrt{3}$ m şi raza de 6 m. Se înclină cilindrul, astfel încît centrul unei baze să se proiecteze vertical într-un punct al cercului celeilalte baze. Ce unghi formează în acest caz generatoarea cu planul orizontal?

3. Un plan ce conţine centrele celor două baze ale unui cilindru circular drept intersectează cercurile celor două baze în A şi B şi respectiv în A' şi B'. (A, A' sînt pe aceeaşi generatoare, B, B' la fel.) Găsiţi distanţa dintre punctele A şi B', în funcţie de raza R a bazei şi generatoarea G.

4. Un con circular drept, cu raza bazei 9 cm şi înălţimea 20 cm, este intersectat cu un plan paralel cu baza. La ce distanţă de vîrf trebuie dus planul, astfel încît raza cercului de secţiune să fie 6 cm?

5. Un con circular drept are diametrul bazei de 12 cm şi înălţimea egală cu 2/3 din diametru. La ce distanţă de vîrful conului trebuie făcută o secţiune printr-un plan paralel cu baza, astfel încît lungimea cercului de secţiune să fie 9π?

6. Un con cu generatoarea de 16 cm se desfăşoară pe un plan, după un sfert de cerc. Găsiţi raza bazei conului.

7. Într-un trunchi de con circular drept cu $R = 16$ cm şi $r = 8$ cm, se înscriu două conuri care au ca baze, bazele trunchiului şi generatoarele unuia în prelungirea generatoarelor celuilalt. Ştiind că înălţimea trunchiului este de 12 cm, să se afle înălţimile celor două conuri.

8. Fie d o semidreaptă de origine O, şi un unghi ascuţit θ, ambele date. Găsiţi locul geometric al punctelor M din spaţiu pentru care unghiul dintre OM şi d este θ.

9. O dreaptă ce trece prin centrul unei sfere cu raza $R = 10$ cm, intersectează un plan α într-un punct M, astfel că $OM = 26$ cm. Ştiind că distanţa de la M la proiecţia lui O pe α este 24 cm, stabiliţi poziţia planului α faţă de sferă.

10. Un plan α intersectează o sferă cu raza $R = 0{,}5$ m, astfel încît aria cercului de secţiune este de 4 ori mai mică decît aria unui cerc mare al sferei. Găsiţi distanţa de la centrul sferei la planul de secţiune.

11. Fie două sfere de centre O şi O' şi raze R şi R'. În fiecare din situaţiile următoare precizaţi poziţiile sferelor:

a) $R = 8$ cm, $R' = 4$ cm, $OO' = 3$ cm;

b) $R = 13{,}5$ cm, $R' = 4{,}5$ cm, $OO' = 20$ cm;

c) $R = 2\sqrt{3}$ cm, $R' = 2(2 - \sqrt{3})$ cm, $OO' = 3$ cm;

d) $R = 2(4 - \sqrt{2})$ cm, $R' = 2(3 - 2\sqrt{3})$, cm, $OO' = 1$ cm.

12. Două plane paralele intersectează sfera de rază $R = 5$ cm, după două cercuri cu razele respectiv $r = 3$ cm şi $r' = 4$ cm. Aflaţi înălţimea zonei sferice determinată de cele două plane.

13. Găsiţi locul geometric al picioarelor perpendicularelor duse din punctul fix A pe planul variabil ce trece prin punctul fix B.

VOLUMELE ŞI ARIILE CORPURILOR ROTUNDE

VOLUMUL CILINDRULUI

Am văzut că suprafaţa prismatică era descrisă de o dreaptă care se sprijinea pe o linie poligonală şi rămînea mereu paralelă cu o dreaptă dată a.

Am obţinut apoi prisma prin secţionarea suprafeţei prismatice cu două plane paralele.

Într-un mod analog se obţine şi cilindrul, doar că dreapta, care generează suprafaţa cilindrică, nu se mai sprijină acum pe o linie poligonală, ci pe o linie curbă.

De asemenea, aşa cum am arătat la pag. 94, am considerat suprafaţa cilindrică drept „analogul curb“ al suprafeţei prismatice.

Vom putea accepta că: ***Volumul cilindrului este egal cu aria bazei înmulţită cu distanţa dintre cele două plane ale bazelor, numită şi înălţimea cilindrului.***

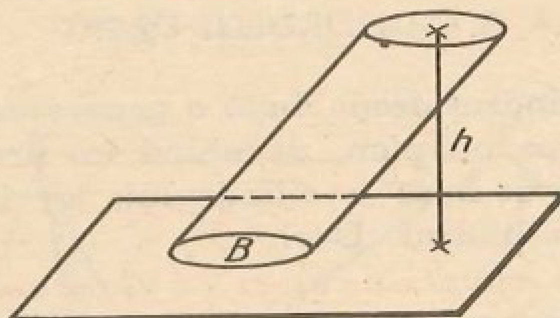


Fig. 19.1

Evident că analogia de mai sus constituie un argument, dar nu o demonstraţie riguroasă.

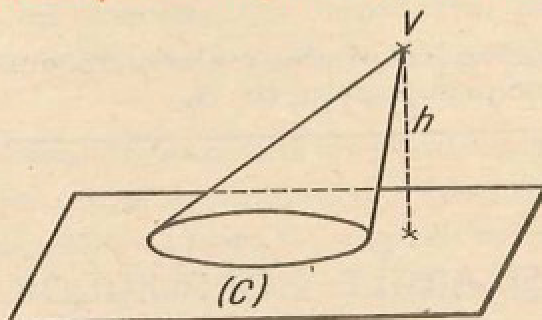
VOLUMUL CONULUI

Aici vom face analogia între piramidă şi con. Acolo am unit un punct exterior unui poligon plan cu toate punctele poligonului.

În cazul conului, punctul exterior – vîrful conului – se uneşte cu toate punctele unei curbe plane. Avînd în vedere această analogie, vom accepta că:

Volumul conului este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei sale și distanța vîrfului său la planul bazei, numită și înălțimea conului.

Fig. 19.2



La fel ca la cilindru, această analogie nu constituie o demonstrație riguroasă, ci doar o justificare intuitivă.

Demonstrațiile riguroase pentru calculul acestor volume se vor da în clasele următoare.

ARIA LATERALĂ A CILINDRULUI ȘI A CONULUI

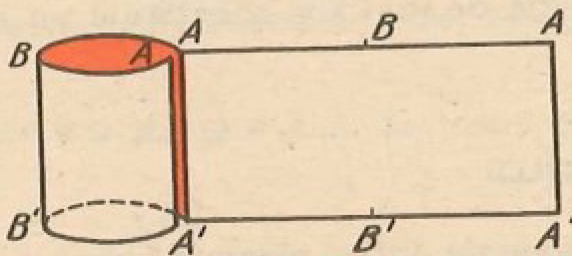
Este mult mai dificil de a defini exact ce înțelegem prin aria unei porțiuni dintr-o suprafață curbă. În cazul nostru avem de a face cu două suprafețe care se pot „așeza pe un plan", fără a modifica lungimile curbelor de pe ele. Este natural să presupunem că această „așezare" nu modifică nici ariile porțiunilor din aceste suprafețe, porțiuni care se „așază" pe niște porțiuni din plan.

ARIA LATERALĂ A CILINDRULUI DREPT

Dacă tăiem cilindrul drept după o generatoare, obținem o suprafață care se poate „așeza" pe un plan, devenind un dreptunghi, cu baza segmentul provenit din curba de bază a cilindrului, iar înălțimea, generatoarea după care a fost tăiat cilindrul. Deci:

Aria laterală a cilindrului drept = (lungimea curbei de bază) · (generatoarea), unde se observă că generatoarea este egală cu înălțimea (fig. 19.3).

Fig. 19.3



Aria totală a cilindrului se obține adunînd la aria laterală, ariile celor două baze. Cum cele două baze sînt congruente, ariile lor vor fi egale. Deci:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2 \cdot \mathcal{A}_b,$$

unde $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{A}_l$ şi $\mathcal{A}_b$ sînt respectiv aria totală, aria laterală şi aria bazei.

În cazul cilindrului circular drept, avînd raza bazei R şi generatoarea G, aria totală este

$$\mathcal{A}_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G + R).$$

Observaţie. Un cilindru oblic se poate transforma într-unul drept, efectuînd o secţiune printr-un plan perpendicular pe generatoare (secţiune normală) şi translatînd una din părţi în direcţia generatoarei, pînă cînd baza ei se suprapune peste cealaltă bază.

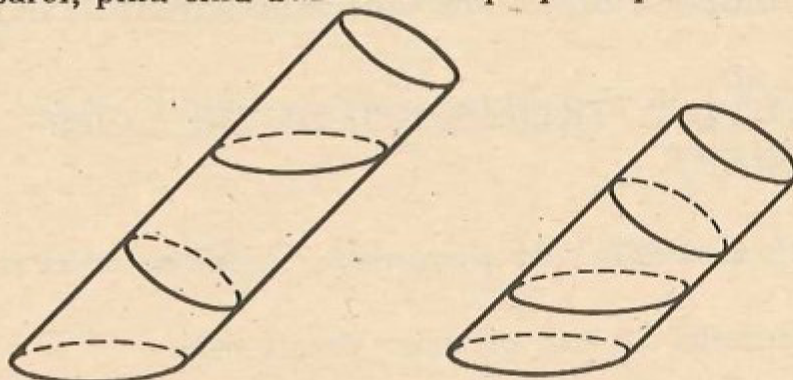


Fig. 19.4

Deci: *aria laterală a unui cilindru oblic este egală cu lungimea secţiunii normale înmulţită cu lungimea generatoarei.*

ARIA LATERALĂ A CONULUI CIRCULAR DREPT

Am văzut că, tăind un con circular drept după o generatoare, suprafaţa obţinută se poate „aşeza" pe un plan, devenind un *sector de cerc*, avînd ca rază generatoarea, iar ca arc un arc ce corespunde cercului de bază al conului (fig. 19.5).

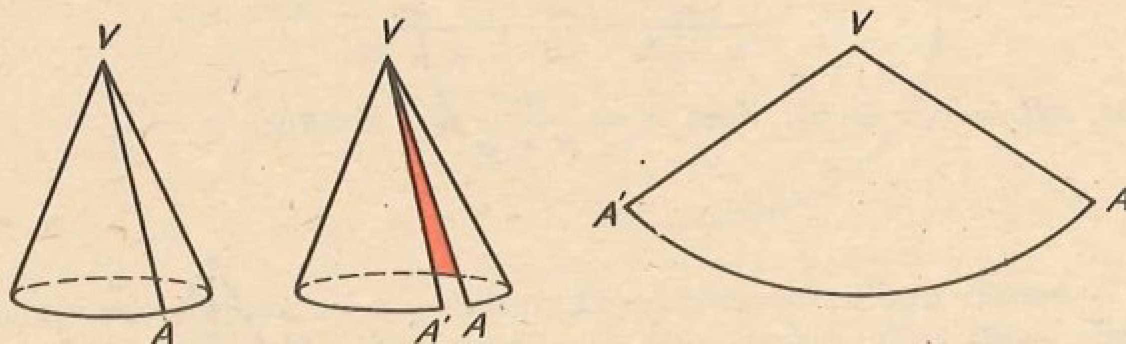


Fig. 19.5

Cum aria unui *sector de cerc* este jumătate din produsul lungimii arcului său şi raza cercului, în cazul nostru $\frac{1}{2}(2\pi R)G$, rezultă că:

Aria laterală a conului circular drept este egală cu

$$\mathcal{A}_l = \pi RG,$$

unde $\mathcal{A}_l$ este aria laterală, R este raza bazei conului, iar G este generatoarea sa.

Aria totală $\mathcal{A}_t$ a unui con circular este aria sa laterală adunată cu aria bazei sale; iar în cazul conului circular drept de rază R și generatoare G, aria totală este egală cu

$$\mathcal{A}_t = \pi RG + \pi R^2 = \pi R(G + R).$$

Aria laterală a unui con oblic este mult mai dificil de calculat.

ARIA ȘI VOLUMUL TRUNCHIULUI DE CON CIRCULAR DREPT

Prin analogie cu trunchiul de piramidă, la fel ca mai sus, pentru con și cilindru, deducem:

Volumul unui trunchi de con circular drept este

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr),$$

unde h este înălțimea sa, R și r razele bazelor.

Aria laterală a unui trunchi de con circular drept este

$$\mathcal{A}_l = \pi(R + r)G,$$

unde G este generatoarea, iar R și r razele bazelor sale.

Putem deduce aceste formule și din formulele corespunzătoare pentru con, astfel:

Fiind dat trunchiul de con circular drept (fig. 19.6) figurăm pînza conică din care provine (fig. 19.7) și determinăm elementele x și g, din relațiile:

$$\frac{x}{x + h} = \frac{r}{R} = \frac{g}{g + G},$$

de unde: $xR = r(x + h)$, deci $x = \frac{rh}{R - r}$ și, analog, $g = \frac{Gr}{R - r}$.

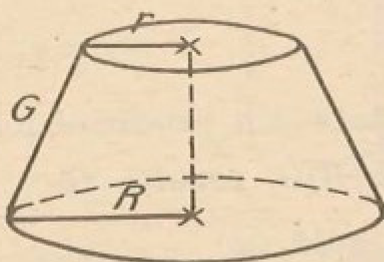


Fig. 19.6

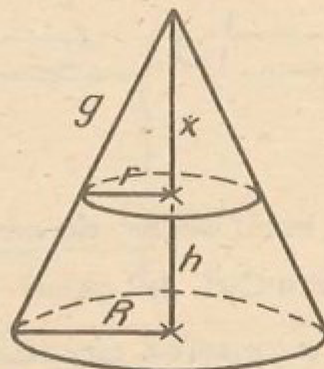


Fig. 19.7

Volumul trunchiului de con este diferența volumelor celor două conuri:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi(x + h)}{3} R^2 - \frac{\pi x}{3} r^2; \quad x + h = \frac{Rh}{R - r};$$

deci:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} h \left(\frac{R^3}{R - r} - \frac{r^3}{R - r}\right) = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

(se împarte $R^3 - r^3$ la $R - r$ ca polinoame în R în r).

Analog,

$$\mathcal{A}_l = \pi R(G + g) - \pi rg; \quad G + g = \frac{GR}{R - r};$$

deci:

$$\mathcal{A}_l = \pi G\left(\frac{R^2}{R - r} - \frac{r^2}{R - r}\right) = \pi G(R + r).$$

ARIA SFEREI

Suprafața unei sfere nu se poate „așeza“ pe un plan.

Vom începe prin a studia aria laterală a unui trunchi de con circular drept înscris în sferă (fig. 19.8).

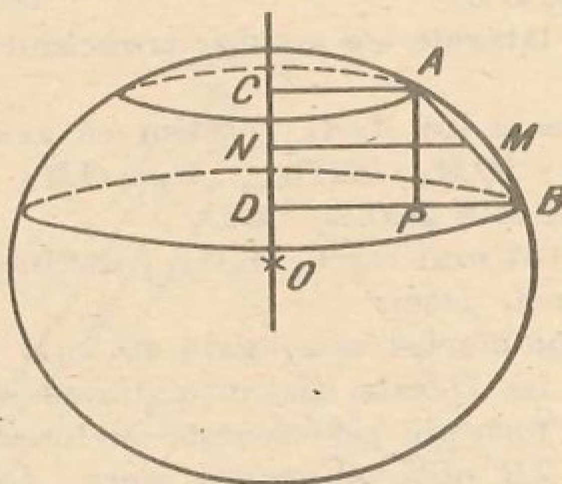


Fig. 19.8

Dacă secționăm figura cu un plan ce trece prin cele două centre C și D ale bazelor trunchiului de con, plan ce va trece prin centrul O al sferei, intersecția cu sfera va da un cerc cu centrul în O. Generatoarea trunchiului de con va fi o coardă AB în acest cerc. Fie M mijlocul acestei coarde. Lungimea MN a perpendicularei din M pe dreapta OC este egală cu $\frac{R + r}{2}$. Dacă P este piciorul perpendicularei din A pe BD, atunci $\triangle OMN$ este asemenea cu $\triangle APB$, deci $\frac{MN}{OM} = \frac{AP}{AB}$ sau $MN \cdot AB = OM \cdot AP$. Deci, aria laterală a

trunchiului de con circular drept poate fi scrisă $\mathcal{A}_l = \pi \cdot 2MN \cdot AB = \pi \cdot 2OM \cdot AP = 2\pi \cdot OM \cdot CD$. Aceasta permite sumarea unor astfel de arii, deoarece OM este acelaşi. Anume:

Să considerăm o „zonă sferică“, secţionată cu un plan ce trece prin centrele C, D ale cercurilor ce o formează (fig. 19.9).

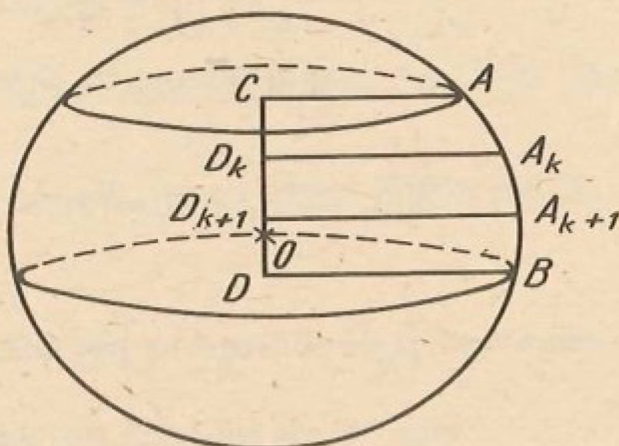


Fig. 19.9

Să facem în acest caz un raţionament mai riguros decît în cazul celorlalte suprafeţe curbe pe care le-am considerat pînă acum.

Să împărţim arcul AB în n părţi egale prin punctele $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ şi să considerăm cele n trunchiuri de con circular drept ce au ca generatoare A_kA_{k+1} şi drept centre ale feţelor (bazelor) proiecţiile D_k, D_{k+1} ale lui A_kA_{k+1} pe CD.

Suma ariilor laterale ale acestor trunchiuri de con va aproxima aria zonei sferice.

Fie M_k mijlocul lui A_kA_{k+1}. Ştim că aria laterală a trunchiului de con respectiv este $\pi \cdot 2OM_k \cdot D_kD_{k+1}$. Dar OM_k este acelaşi pentru toţi k, deci suma acestor arii este $2\pi OM_k \cdot CD$.

Făcînd pe n tot mai mare, A_kA_{k+1} devine tot mai mic, OM_k se apropie de raza R a sferei. Deci:

Aria unei zone sferice este egală cu $2\pi R \cdot H$ unde R este raza sferei din care face parte, iar H este distanţa dintre acele plane care determină zona sferică. Această formulă se foloseşte şi la calculul ariei unei calote sferice.

Pentru $H = 2R$ obţinem toată sfera, deci aria sferei de rază R este egală cu $4\pi \cdot R^2$.

VOLUMUL SFEREI

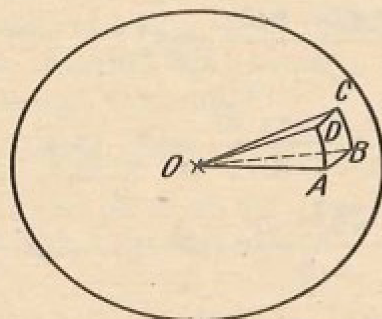
Volumul unei sfere de rază R este egal cu o treime din produsul dintre aria acestei sfere şi raza ei, adică:

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Această afirmaţie se poate argumenta în acelaşi mod în care s-a argumentat faptul că aria cercului este egală cu o jumătate din produsul dintre lungimea cercului şi rază. Vom presupune sfera umplută cu piramide cu vîrfurile în centrul ei şi bazele patrulatere cu vîrfurile pe sferă. Vom observa că înălţimile lor aproximează raza sferei, iar suma ariilor bazelor lor aproximează aria sferei. Suma volumelor lor va aproxima volumul sferei şi va fi o treime din înălţimea comună (raza sferei) înmulţită cu suma ariilor bazelor (aria sferei).

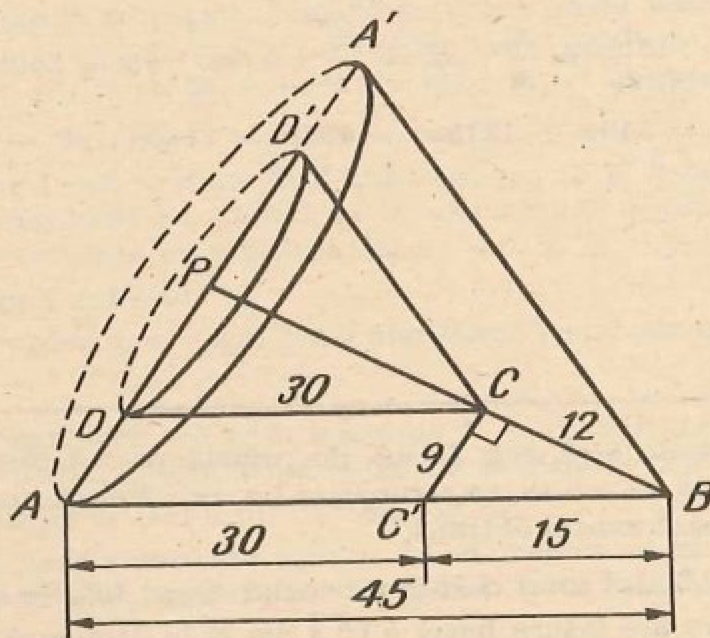
$$\mathcal{V} = \frac{R}{3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Fig. 19.10



Problemă rezolvată. Un trapez are bazele de 30 cm şi 45 cm, iar laturile neparalele de 9 cm şi 12 cm. Să se calculeze aria totală şi volumul corpului obţinut prin rotirea trapezului în jurul laturii de 12 cm.

Fig. 19.11



Rezolvare. Înainte de a începe rezolvarea propriu-zisă a problemei, atragem atenţia asupra modului în care este bine să faceţi desenul corpurilor de rotaţie.

Cînd vreţi să vedeţi ce formă are un corp, provenind din rotirea unei figuri plane în jurul unei axe, este bine să procedaţi în modul următor: desenaţi simetrica figurii plane A' faţă de axă, iar cu extremităţile în vîrfurile simetrice duceţi elipse, cu axa mică cît mai mică.

Spre exemplu, în cazul problemei noastre, notăm cu $P = AD \cap BC$ şi $CC' \parallel AD$, $\triangle CC'B \sim \triangle PAB \Rightarrow \frac{AP}{9} = \frac{BP}{12} = \frac{45}{15} = 3, AP = 27$ cm, $BP = 36$ cm. Din $\triangle CC'B \sim \triangle PDC \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{PC}{12} = \frac{18}{9} = 2$, $PC = 24$ cm. Observăm că $AP^2 + BP^2 = AB^2$, $(27^2 + 36^2 = 45^2)$. Deci $\sphericalangle APB = 90°$. Fie A' şi D' simetricele lui A şi D faţă de BC, ele se vor găsi pe prelungirea lui AP. Descriem cercuri cu diametrele AA' şi DD' (pe care le desenăm în spaţiu aşa cum se vede în figura 19.11). Simetricele punctelor B şi C faţă de axa de rotaţie coincid cu ele însele.

Deci, acum observăm că s-a format un con circular drept (cu vîrful în B şi cu baza cercul de diametru AA') din care lipseşte un alt con (cu vîrful în C şi cu baza cercul de diametru DD'), asemenea cu el.

Volumul conului mic este $v = \frac{\pi 18^2 \cdot 24}{3}$ cm³.

Volumul conului mare este $\mathcal{V} = \frac{\pi 27^2 \cdot 36}{3}$ cm³. Deci,

$$\mathcal{V} - v = \frac{\pi 27^2 \cdot 36}{3} - \frac{\pi 18^2 \cdot 24}{3} = \frac{\pi 9^2 \cdot 12}{3}(3^2 \cdot 3 - 2^2 \cdot 2) = \pi 9^2 \cdot 4 \cdot 19 = 6\,156\pi,$$

$$\mathcal{V}' = 6\,156\pi \text{ cm}^3.$$

Pentru a calcula aria totală, vom observa asemănarea dintre cele două conuri, raportul de asemănare fiind $\frac{2}{3}$. Notînd cu $\mathcal{A}_l$ aria laterală a conului mic şi cu $\mathcal{A}_l'$ aria laterală a conului mare, putem scrie:

$$\frac{\mathcal{A}_l}{\mathcal{A}_l'} = \frac{4}{9}, \ \mathcal{A}_l = \frac{4}{9} \cdot \pi \cdot 27 \cdot 45 = 540\pi \text{ cm}^2.$$

$$\mathcal{A}' = 540\pi + 1215\pi + 405\pi = 2160\pi; \ \mathcal{A}' = 2160\pi \text{ cm}^2.$$

PROBLEME 19

1. Dintr-o bară de oţel, sub formă de prismă patrulateră regulată cu latura bazei de 12 cm şi înălţimea de 4,5 m, se strunjeşte un ax cilindric, cu pierdere minimă de material. Să se afle volumul axului obţinut.

2. Să se afle volumul unui cilindru circular drept înscris într-o prismă triunghiulară regulată dreaptă care are latura bazei $4\sqrt{3}$ dm şi înălţimea de 10 dm.

3. Un con circular drept are raza bazei de 6 cm şi generatoarea de 10 cm. Găsiţi volumul conului.

4. Un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90°$) se roteşte, pe rînd, în jurul catetelor şi apoi al ipotenuzei.

a) Dacă $AB = 5$ dm şi $AC = 12$ dm, găsiţi cele trei volume $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ şi $\mathcal{V}_3$.

b) Dacă $AB = c$, $AC = b$, $\mathcal{V}_1$ şi $\mathcal{V}_2$ sînt volumele obţinute prin rotirea triunghiului în jurul catetelor, iar $\mathcal{V}$ prin rotirea în jurul ipotenuzei, arătaţi că:

$$\frac{1}{\mathcal{V}^2} = \frac{1}{\mathcal{V}_1^2} + \frac{1}{\mathcal{V}_2^2}.$$

c) Formulaţi şi demonstraţi o reciprocă la punctul b).

5*. Un con circular drept are raza bazei $r = 0{,}8$ m. El are trei generatoare două cîte două perpendiculare.

a) Aflaţi volumul conului.

b) Rezolvaţi problema în cazul general, cînd raza bazei este r.

6*. Calculaţi volumul unui con circumscris unui tetraedru regulat de muchie $a = 6$cm.

7. Un dreptunghi cu laturile a şi b ($a < b$) se roteşte în jurul lui a şi apoi în jurul lui b.

a) În ce caz se obţine aria laterală mai mare?

b) În ce caz se obţine volumul mai mare?

8. Un trapez dreptunghic $ABCD$ ($\hat{B} = \hat{C} = 90°$) se roteşte în jurul unei paralele cu BC, distanţa de la BC la axă fiind de 3 cm (se consideră axa în planul trapezului, dar în afara lui). Dacă $AB = 12$ cm, $AD = 10$ cm şi $CD = 4$ cm, să se afle aria totală şi volumul corpului format.

9. Aria totală a unui cilindru circular drept este de 132π cm^2, iar cea laterală 96π cm^2. Să se afle volumul cilindrului.

10. Un con se desfăşoară pe un plan după un semicerc cu diametrul de 20 cm. Să se afle volumul conului.

11*. Un trapez dreptunghic se roteşte, odată în jurul bazei mici, altă dată în jurul bazei mari. Cunoscînd volumele $\mathcal{V}_1$ şi $\mathcal{V}_2$ ale corpurilor astfel obţinute, precum şi latura a perpendiculară pe baze, să se calculeze, în funcţie de $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ şi a, diferenţa dintre bazele trapezului.

12*. Într-un con circular drept cu diametrul bazei egal cu $12\sqrt{2}$ cm şi înălţimea egală cu 6 cm, se înscrie un cub astfel încît o faţă a sa să se găsească în planul bazei conului, iar vîrfurile celeilalte baze să fie situate pe pînza conică.

a) Să se găsească volumul cubului.

b) Rezolvaţi aceeaşi problemă în cazul cînd diametrul bazei cercului este $2a\sqrt{2}$ şi înălţimea conului a.

13. Un con circular drept, care are raza bazei de 8 m şi înălţimea de 16 m, se taie cu un plan paralel cu planul bazei, determinînd astfel un trunchi de con de înălţime 12 m.

a) Să se calculeze volumul trunchiului de con format.

b) Să se determine la ce distanţă de planul bazei trebuie să se facă o secţiune în con, printr-un plan paralel cu baza, astfel ca ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

14. Un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90°$) se roteşte în jurul perpendicularei în B pe BC. Dacă $AB = 3$ cm şi $AC = 4$ cm, găsiţi volumul corpului format.

15. Un trunchi de con circular drept are aria laterală 220π cm^2 şi generatoarea 10cm. Ştiind că raportul razelor trunchiului este de $4 : 7$, să se afle aria totală şi volumul trunchiului de con.

16. Într-o sferă cu raza $R = 5$ m, se înscrie un con cu înălţimea $h = 8$ m. Să se afle:

a) aria şi volumul sferei;

b) aria şi volumul conului;

c) ariile calotelor formate.

17. Un con circular drept, în care generatoarele fac unghiuri de 30° cu înălţimea, taie dintr-o sferă, cu centrul în vîrful conului, o calotă. Raza sferei fiind R, să se afle aria calotei.

18*. O piramidă, cu baza pătrat de latură a, are toate feţele laterale triunghiuri echilaterale. Calculaţi raza semisferei cu centrul în centrul bazei piramidei şi tangentă la feţele laterale ale piramidei.

19. Dacă două cercuri necoplanare au două puncte comune, atunci ele sînt situate pe aceeaşi sferă.

20*. Dacă un poliedru are toate vîrfurile sale pe o sferă, atunci toate feţele sale sînt poligoane inscriptibile.

21*. Piramida $VABCD$ are baza $ABCD$ dreptunghi. Din C ducem $CP \perp VA$ ($P \in AV$), iar din D ducem $DQ \perp VB$ ($Q \in BV$). Demonstraţi că $PQBA$ este un patrulater inscriptibil.

22. Dacă există o sferă tangentă la toate muchiile unui tetraedru, atunci suma oricăror două muchii opuse ale tetraedrului este aceeaşi. (Prin muchii opuse înţelegem două muchii care n-au nici un vîrf comun.)

23*. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Fie M şi N două puncte variabile astfel încît $MA \perp AN$, $MB \perp BN$, $MC \perp NC$, $MD \perp ND$. Să se arate că segmentul MN are lungime constantă.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Se dau cinci puncte, din care, nu există trei coliniare şi nici patru coplanare. Cîte plane, care să conţină trei dintre ele, se pot duce?

2. Folosind P_6, demonstraţi că există în spaţiu drepte care nu sînt nici paralele nici concurente.

3*. Se dau dreapta d, planul α ($d \not\subset \alpha$), punctele A şi B, care nu sînt situate nici în plan, nici pe dreaptă. Să se determine punctele $D \in d$ şi $C \in \alpha$, astfel încît $ACBD$ (cu vîrfurile în această ordine) să fie paralelogram. Discuţie.

4*. Fie a, b, c, d, patru drepte oarecare în spaţiu. Să se construiască un trapez, avînd cîte un vîrf al unei baze pe a, b şi cîte un vîrf al celeilalte baze pe c, d. Să se efectueze construcţia:

a) vîrfurile pe a, b sînt date;

b) vîrfurile pe a, c sînt date.

5. Formulaţi şi demonstraţi o reciprocă a teoremei lui Desargues.

6*. Fie ABC un triunghi, O un punct în planul său α, D un punct pe perpendiculara în O pe planul α. Să se arate că $AD \perp BC$, dacă şi numai dacă, O se află pe înălţimea din A a triunghiului ABC.

7*. Dreptele d_1 şi d_2, perpendiculare şi concurente în A, intersectează planul α în două puncte diferite. Unghiurile dintre aceste două drepte şi planul α au măsurile de $30°$ şi respectiv $45°$. Să se calculeze măsura unghiului dintre planul α şi planul determinat de d_1 şi d_2. (Distanţa de la A la planul α este egală cu a.)

8*. Fie A, B, C, D, patru puncte necoplanare. Printr-un punct M de pe segmentul AB se duce un plan paralel cu AC şi BD. Acest plan intersectează pe BC în Q, pe CD în P şi pe AD în N.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) În cazul $AM = x$ cm, $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm şi $BD = 7$ cm, să se calculeze, în funcţie de x, perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

9. Se dă triunghiul dreptunghic ABC ale cărui catete sînt $AB = 2\sqrt{2}$ şi $AC = \sqrt{3}$. Pe planul triunghiului se ridică, de aceeaşi parte, perpendicularele $AA' = 8$, $BB' = 4$, $CC' = 2$. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor AA', BB' şi respectiv CC'.

a) Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic.

b) Să se arate că triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral.

(Probe de verificarea cunoştinţelor pentru înscrierea în treapta I de liceu, Jud. Prahova — 1975).

10. Fie M la distanţa $MA = 3$ cm de un plan α şi la distanţa $MB = 8$ cm de un alt plan β, paralel cu primul. Fie BC un segment de dreaptă de lungime egală cu 6 cm, situat în planul β. Dreapta MC intersectează planul α în D. Să se afle perimetrul triunghiului MAD.

11. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a.

a) Să se calculeze distanțele de la punctele A, C, B' la diagonala BD'.

b) Să se arate că segmentele ale căror măsuri le-am calculat la pct. a) sînt concurente într-un punct T.

c) Să se arate că $\frac{BT}{TD'} = \frac{1}{2}$.

d) Să se afle unghiul dintre AB' și AC.

(G.M. nr. 4/1975)

12. În vîrful C al dreptunghiului $ABCD$, cu dimensiunile $AB = a\sqrt{3}$ și $BC = a$, se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului, pe care se ia un punct M astfel încît $\sphericalangle MAC = 30°$.

a) Să se calculeze volumul prismei care are o bază dreptunghiul $ABCD$ și înălțimea CM.

b) Prisma de mai sus se intersectează cu un plan ce trece prin punctele BMD. Să se calculeze aria acestei secțiuni.

c) În centrul O, al dreptunghiului $ABCD$, se ridică perpendiculara pe planul său care întîlnește pe AM în E. Este triunghiul BEM dreptunghic?

(Concurs, faza locală, Ploiești, 1976, prof. N. Radu)

13. Un cub gol, din tablă groasă de 5 mm, are muchia în interior de 40 cm. Să se afle masa corpului știind că densitatea tablei este de $7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3.

14. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC ($AB \equiv AC$, $AB = a$) se duce perpendicular $MC = a$.

a) Să se arate că $MA \equiv CB$.

b) Ducem prin M o dreaptă paralelă cu CB. Fie D un punct pe această dreaptă, astfel încît proiecția lui D pe planul triunghiului ABC să coincidă cu mijlocul segmentului CB. Să se arate că triunghiul ABD este isoscel.

15. O prismă oblică are ca bază un triunghi echilateral ABC, cu $AB = 4$ m. Fața $CBB'C'$ este un romb cu un unghi de 60° și este perpendiculară pe planul bazei. Se cere:

a) Volumul prismei; b) aria laterală a prismei.

(Concurs, etapa locală, Sibiu 1978)

16. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 6 cm, latura bazei mari egală cu $\frac{4}{3}$ din înălțime și latura bazei mici egală cu $\frac{5}{8}$ din latura bazei mari. Se cere:

a) Volumul trunchiului de piramidă;

b) volumul piramidei din care provine trunchiul;

c) ariile laterale ale trunchiului de piramidă și piramidei.

(Probe de verificarea cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu — Jud. Olt, 1978.)

17. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel al cărui perimetru este de 18 cm, iar lungimea segmentului care unește mijloacele laturilor congruente ale triunghiului este de 4 cm. În con se face o secțiune, printr-un plan paralel cu baza, situat față de vîrf la $\frac{2}{3}$ din înălțimea conului. Se cere:

a) Să se calculeze aria laterală și aria totală a conului inițial;

b) să se arate că volumul conului inițial este de 16π cm^3;

c) să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con obținut;

d) să se calculeze aria și volumul sferei înscrisă în conul inițial.

(Probe de verificarea cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu — Jud. Caraș Severin.)

18. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm şi înălţimea de 24 cm.

a) Să se determine volumul şi aria totală a trunchiului de con.

b) Să se calculeze volumul conului din care provine trunchiul de con.

c) Să se calculeze raza sferei circumscrise conului din care provine trunchiul de con.

(Probe de verificarea cunoştinţelor pentru înscrierea în treapta I de liceu — Bucureşti, 1978.)

19. Se dă o prismă patrulateră regulată dreaptă, $ABCDA'B'C'D'$. Latura bazei este de 2 dm, iar diagonala AC' a prismei este de 4 dm.

a) Să se arate că triunghiul ACC' este isoscel.

b) Să se calculeze aria totală a piramidei cu vîrful în C' şi baza $ABCD$.

c) Presupunînd că prisma este metalică şi că prin topire se transformă în alta a cărei bază este un dreptunghi cu lungimea de 2 dm şi lăţimea de $\sqrt{2}$ dm, să se arate că înălţimea acestei prisme este egală cu diagonala prismei iniţiale.

(Concurs, faza locală, jud. Prahova, 1972)

20. Într-un cerc de rază R se înscrie un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), arcele AC şi AB fiind invers proporţionale cu numerele 1,(3) şi 0,(6). Pe perpendiculara ridicată în A pe planul triunghiului ABC se ia un segment $AV = \frac{3R}{2}$. Să se afle:

a) măsura arcelor AC şi AB;

b) aria triunghiului VBC;

c) unghiul plan al diedrului format de planele (VBC) şi (ABC).

(Probe de verificarea cunoştinţelor pentru înscrierea în treapta I de liceu, jud. Prahova, 1976.)

21. Fie $ABCD$ un romb de latură egală cu a şi unghiul $A = 60°$. În punctul A se ridică perpendiculara d pe planul (ABC), pe care se ia un segment $AM = \frac{3a}{2}$. Să se afle:

a) volumul prismei drepte care are ca bază rombul $ABCD$ şi înălţimea egală cu AM;

b) ce puteţi spune despre unghiul format de (ABC) şi (BMA)?; enunţaţi propoziţia pe care aţi aplicat-o;

c) unghiul plan al diedrului format de (ABC) şi (BMD);

d) distanţa de la punctul M la dreapta BC;

e) volumul piramidei cu vîrful în B şi baza AMD.

22. O prismă dreaptă are ca bază un trapez dreptunghic $ABCD$, ($\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$) şi diagonala BD perpendiculară pe latura BC ($BC = 10$ cm). Linia mijlocie a trapezului MN întîlneşte diagonalele BD şi AC în P şi Q. Cunoscînd că $PQ = 4$ cm şi că înălţimea prismei este de 10 cm, să se calculeze: a) aria laterală şi volumul prismei; b) lungimea diagonalei BD.

(G.M. nr. 5/1977)

23*. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Să se arate că dacă perpendicularele din B, D şi A' pe diagonala AC' sînt concurente într-un punct M, aparţinînd acestei diagonale, atunci paralelipipedul este cub.

24. Pe latura OX a unghiului $XOY = 60°$ se ia punctul A astfel încît $OA = a$, din care se duce perpendiculara pe OX şi care taie pe OY în B. Din B se duce perpendiculara d pe planul unghiului dat şi se ia pe ea $BM \equiv OA$. Fie BE perpendiculara pe AM ($E \in AM$), AC perpendiculara pe OB ($C \in OB$) şi CD perpendiculara pe AM ($D \in AM$).

a) Să se determine unghiurile triunghiului ABM şi lungimea înălţimii BE.

b) Să se afle raportul $\frac{AD}{DE}$.

c) Să se calculeze perimetrul triunghiului OAM.

(Concurs faza locală, Tîrgovişte, N. Bebea)

25. Să se calculeze volumul prismei patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$ cu latura bazei $AB = a$ și unghiul dintre MD și NC' de $60°$ (M și N sînt mijloacele muchiilor laterale AA' și DD').

(Concurs etapa locală, București, 1978 — C. Cărbunaru)

26. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu laturile bazei $AB = a$ și $BC = b$. Să se demonstreze că dacă înălțimea paralelipipedului este $AA' = \sqrt{2ab}$, diagonala paralelipipedului este egală cu suma a două laturi alăturate bazei.

27. Se dă piramida triunghiulară $VABC$ astfel încît: $AV \equiv BV \equiv CV$, $AV = a$, $\sphericalangle AVB = 60°$, $\sphericalangle AVC = 90°$, $\sphericalangle BVC = 120°$.

a) Să se calculeze laturile triunghiului ABC.

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei cu vîrful V și baza ABC.

28. Într-un tetraedru regulat $SABC$ de muchie a, se face o secțiune printr-un plan ce trece prin punctele A, P, Q (P și Q sînt situate pe SC și respectiv SB, astfel încît $SP = 2PC$ și $SQ = 2QB$).

a) Să se afle aria secțiunii.

b) Să se afle volumul piramidei cu baza PAQ și cu vîrful în S.

(Probe de verificarea cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu, Constanța, 1976.)

29. Se dă trapezul $ABCD$ în care $AD \parallel BC$ și $AB \equiv AD \equiv DC$, $AB = a$ și $BC = 2a$. Diagonalele AC și BD se intersectează în O. În O se ridică perpendiculara pe planul trapezului, pe care se ia un punct S astfel ca $SO = \frac{a}{2}$.

a) Să se arate că unghiurile ascuțite ale trapezului au fiecare cîte $60°$ și că AC este perpendiculară pe AB, iar BD este perpendiculară pe DC.

b) Să se arate că triunghiul SAB este dreptunghic.

c) Să se determine unghiul diedru format de planul (SAD) cu planul trapezului.

d) Prin mijlocul segmentului SO se duce un plan paralel cu planul trapezului, care întîlnește segmentele SA, SB, SC, SD respectiv în A_1, B_1, C_1, D_1.

Fie $\mathcal{V}$ și v volumele piramidelor care au vîrful S și ca baze poligoanele $ABCD$ și respectiv $A_1B_1C_1D_1$. Să se arate că $\mathcal{V} = 8v$.

(Concurs, faza locală, Prahova, 1970)

30. Volumul unui trunchi de piramidă regulată cu baze pătrate este de șapte ori mai mare decît volumul unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 7 dm, lățimea de 40 cm și înălțimea de 0,3 m; înălțimea trunchiului de piramidă este de 4 dm, iar latura bazei mici este de 2,25 ori mai mare decît această înălțime.

Se cere:

a) volumul trunchiului de piramidă;

b) latura bazei mari;

c) aria laterală a trunchiului;

d) la ce distanță de planul bazei mari trebuie făcută o secțiune paralelă cu bazele, astfel încît aria acestei secțiuni să fie egală cu 144 dm².

(Concurs pentru admiterea în clasa a IX-a, 1971)

31. Un trapez dreptunghic are baza mare egală cu 16 cm, înălțimea de 30 mm și baza mică egală cu 0,75 din baza mare. Să se afle:

a) perimetrul și aria trapezului;

b) aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mici.

32. O dreaptă perpendiculară pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC intersectează catetele AB şi AC în S, respectiv în T.

a) Să se arate că $CS \perp BT$.

b) Dacă $AB = 5$ cm şi $AC = 12$ cm, să se afle volumul corpului obţinut prin rotirea triunghiului ABC în jurul ipotenuzei BC.

33. Într-un trapez isoscel $ABCD$, un unghi ascuţit este de 45°. Latura oblică AD este congruentă cu baza mică CD ($AD = 10$ cm).

a) Să se afle lungimea diagonalei BD.

b) Să se afle volumul corpului obţinut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

34. Un trapez isoscel $ABCD$ are baza mare $AB = 10$ cm, baza mică CD şi laturile neparalele sînt egale, fiecare, cu cîte 5 cm. Se cere:

a) să se afle unghiurile trapezului;

b) să se demonstreze că $AD \perp BD$;

c) să se afle volumul corpului obţinut prin rotirea trapezului în jurul dreptei ce trece prin mijloacele bazelor.

35. Se consideră un trapez cu ambele unghiuri de la baza mare ascuţite.

a) Rotim trapezul în jurul bazei mici.

b) Rotim trapezul în jurul bazei mari.

Cînd este mai mare volumul obţinut, în cazul a) sau în cazul b)? Volumele pot fi egale?

(Concurs, 1973 — I.C. Ligor)

36*. Dintr-o piesă uzată, în formă de con circular drept, cu raza bazei de 2 dm şi înălţimea $2\sqrt{2}$ dm, se taie un corp în formă de cub, cu una din feţe aşezată pe baza conului, de volum maxim. Să se arate că în felul acesta se foloseşte mai puţin de un sfert din material.

(Concurs elevi, 1973)

37. Triunghiul $AB'C'$ ($\hat{A} = 90°$, $AB' \equiv AC'$) se proiectează pe un plan care conţine înălţimea lui, AD, după triunghiul echilateral ABC. Să se găsească valoarea unei funcţii trigonometrice a unghiului pe care îl fac fiecare dintre dreptele AB' şi AC' cu planul triunghiului ABC.

38. Un triunghi ABC, dreptunghic în A, se proiectează pe un plan α care conţine vîrful B (A, C sînt de aceeaşi parte a planului).

Proiecţia triunghiului ABC este triunghiul $A'BC'$. Ştiind că $AA' \equiv CC'$ şi că distanţa dintre A şi C este a, că unghiurile dreptelor CB şi BA cu α sînt respectiv de 30° şi 45°, să se determine, în funcţie de a, segmentele BA', BC' şi CC'.

39. Fie OX, OY, OZ trei semidrepte în spaţiu, astfel că măsura unghiului format de oricare pereche dintre ele este de 60°.

a) Să se demonstreze că una dintre aceste semidrepte se proiectează pe planul determinat de celelalte două după bisectoarea lor.

b) Fie punctul A pe OZ, situat la distanţa a de O şi fie A' proiecţia lui A pe planul XOY. Să se calculeze distanţa AA'.

40. Se consideră un con circular drept cu raza bazei R şi înălţimea $VO = 2R$, V fiind vîrful conului şi O centrul cercului de bază. Să se calculeze raza cercului de intersecţie a conului cu semisfera avînd drept cerc mare baza conului.

41*. O găleată în formă de trunchi de con, din tablă, are dimensiunile $r = 10$ cm, $R = 25$ cm, $G = 30$ cm. Cîtă tablă a fost necesară pentru confecţionarea ei. (Se consumă la îmbinări 8% din suprafaţa tablei folosite.) Ce capacitate are?

Cîte grade are sectorul de cerc care cuprinde porţiunea de coroană circulară din desfăşurarea suprafeţei laterale a trunchiului de con?
(Probe de verificarea cunoştinţelor pentru înscrierea în treapta I de liceu — jud. Vaslui.)

42. Un trunchi de con circular drept, ale cărui generatoare fac cu planul bazei unghiuri de 45°, este circumscris unei sfere cu raza de 3 cm. Să se calculeze razele bazelor şi aria laterală a trunchiului de con.

43. Într-o sferă de rază $R = 5$ cm se înscrie un cilindru circular drept de înălţime 6 cm. Se cere:

a) aria calotei sferice aflate deasupra bazei cilindrului;

b) aria laterală şi volumul cilindrului.

44. În triunghiul ABC cunoaştem: $BC = 4$ cm, înălţimea $AH = \sqrt{3}$ cm şi unghiul $B = 30°$. O paralelă la latura BC intersectează pe AB şi AC respectiv în punctele D şi E, iar DE intersectează pe AH în I.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor AB, AC şi BH.

b) Dacă $IH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm, să se calculeze lungimile segmentelor BD, DE şi EC.

c) Să se calculeze aria totală a corpului obţinut prin rotirea trapezului $BDEC$, în jurul lui BC.

45*. Se dau două cercuri de raze a şi b situate pe o sferă de rază R, tangente exterior. Se cere distanţa dintre centrele lor.

46*. Fiind dat un con circular drept cu înălţimea h şi raza bazei r, să se determine poziţia unui punct P, care este situat la aceeaşi distanţă de vîrful conului şi punctele de pe cercul bazei.

47. Un pătrat de latură 4 cm se proiectează pe un plan care face cu planul pătratului un unghi de 60°.

a) Să se afle aria proiecţiei.

b) Să se demonstreze că, în general, proiecţia pătratului este un paralelogram. Cînd este un dreptunghi? Cînd este un romb?

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

PROBLEME 1 (pagina 9)

1. a) Toate patru nu pot fi coliniare. Dacă ar fi coliniare, ar fi situate într-un acelaşi plan; b) Vom uni, pe rînd, pe A cu B, cu C şi cu D. Pe B îl vom uni numai cu C şi cu D, căci cu A l-am unit. Apoi vom uni pe C cu D. Deci obţinem $3 + 2 + 1 = 6$ (drepte).

2. O singură dreaptă. (Dacă A, B, C sînt coliniare şi B, C, D sînt coliniare, rezultă că A, B, C, D sînt coliniare.)

3. Să notăm cele trei puncte coliniare cu A, B, C. a) Toate planele conţin pe D şi cel puţin două din punctele A, B, C. Deci, există un singur plan; b) O infinitate de plane. (Toate planele care trec prin dreapta AB.)

4. Se foloseşte propoziţia P_4.

5. a) Un singur plan, în situaţia cînd M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 sînt coliniare. Spre exemplu, planul determinat de M_7 cu M_1 şi M_2, conţine şi toate celelalte puncte; b) Cel mai mare număr de plane se obţine cînd oricare trei dintre cele şase puncte din plan sînt necoliniare. (15 plane); c) Nu.

6. a) Şapte drepte, în cazul în care toate cele şase puncte din planul dat sînt coliniare; b) În cazul în care oricare trei puncte, dintre cele şase din planul dat, nu sînt coliniare, se obţin dreptele M_7M_1, $M_7M_2, \ldots, M_7M_6$ (şase drepte) şi încă 15 drepte determinate în planul dat. Deci, în total, 21 de drepte.

7. Pe dreapta AB avem: $PA - PB \equiv AB$. În triunghiul AQB avem: $AB > |QA - QB|$ (fig. R.1).

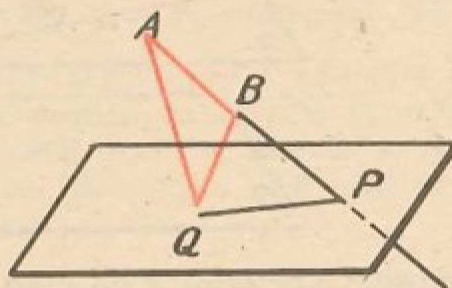


Fig. R.1

8. Dacă $A \in d$ şi $B \in g$, dreapta AB este situată în planul determinat de d şi g.

9. În general nu. Priviţi figura R. 2.



Fig. R. 2

10. Planul determinat de dreptele d şi g.

11. Planul determinat de A și d, mai puțin semidreptele ce trec prin A și sînt paralele cu d. (Punctul A aparține locului geometric.)

PROBLEME 2 (pagina 16)

1. Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele. (Tranzitivitatea relației de paralelism.)

2. $DE = 8$ cm.

3. Nu. Puteți da un exemplu.

4. Presupunem că α nu ar fi paralel cu β, deci $\alpha \cap \beta = c$. Atunci $a \parallel c$ și $b \parallel c$, deci $a \parallel b$, ceea ce contrazice ipoteza, deci $\alpha \parallel \beta$.

5. Șase drepte.

6. Fie a o dreaptă din planul α, despre care presupunem că nu ar fi paralelă cu β $(a \cap \beta = \{M\})$. Ar rezulta că $M \in a$ și $M \in \beta$, deci că α și β nu ar fi paralele, deci $a \parallel \beta$.

7. Dacă orice dreaptă conținută în planul α este paralelă cu planul β, atunci $\alpha \parallel \beta$. Reciproca este adevărată.

8. Nu. Se consideră α și β două plane și $\alpha \cap \beta = a$. Fie d o dreaptă $(d \parallel a)$ și $d \not\subset \alpha$, $d \not\subset \beta$, $\alpha \parallel d$, $\beta \parallel d \not\Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

9. Nu. Fie α și β cele două plane paralele și $d \subset \beta$. Printr-un punct $A \in \alpha$ trece o singură paralelă (g) conținută în α și paralelă la d. Ducem prin A, tot în α, o dreaptă h, diferită de g. Dreptele d și h nu sînt paralele.

10. a) MN este paralelă cu planul α; b) MN înțeapă planul α.

11. Fie ABC un triunghi și α un plan $(\alpha \parallel AB$ și $\alpha \parallel AC) \Rightarrow \alpha \parallel (ABC)$; $BC \subset (ABC) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha \parallel BC$.

12. $AB \parallel g$.

PROBLEME 3 (pagina 20)

1. Nu. Priviți figura R. 3.

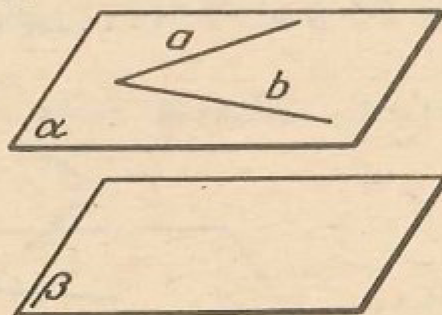


Fig. R.3

2. Punctul C și dreapta a determină un plan α, iar punctul C și dreapta b determină un alt plan β. Planele α și β, avînd un punct comun (C), conform lui P_5, mai au încă unul, deci se intersectează după o dreaptă d. Aceasta este dreapta căutată (fig. R.4).

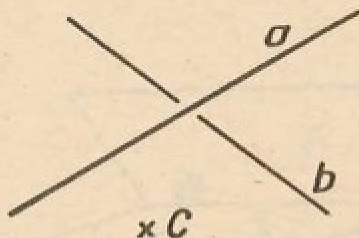


Fig. R.4

3. Presupunem că dreapta d are un punct comun cu planul α, atunci ea este toată conținută în planul α, pentru că este paralelă cu g, și g este paralelă cu α. Dacă nu are un punct comun cu α este, evident, paralelă cu α.

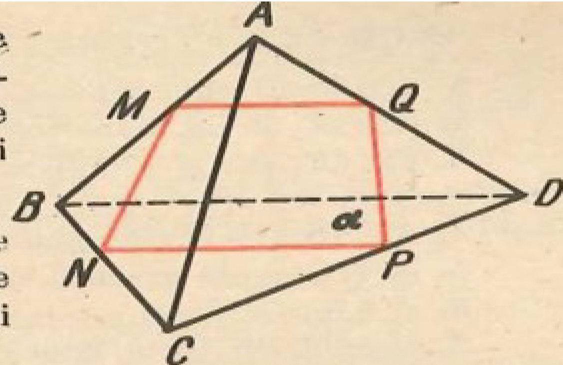


Fig. R.5

4. Să presupunem că $\alpha \parallel BD$ (fig. R.5). Deoarece $BD \parallel \alpha$, planul (ABD) va tăia pe α după o dreaptă paralelă cu BD. Deci $MQ \parallel BD$. În mod asemănător se demonstrează că $NP \parallel BD$. Rezultă că $MQ \parallel NP$ și deci că $MNPQ$ este un trapez.

5. Segmentul AB aparține planului determinat de dreptele a și b. Problema s-a redus la o problemă de geometrie în plan.(Locul geometric al mijlocului unui segment ce se sprijină pe două drepte paralele.)

6. Dacă $\gamma \parallel a$.

7. Fie A un punct oarecare al dreptei d. Punctul A și dreapta g determină un plan β. Prin A ducem în planul β paralela la g, pe care o notăm cu g'. Dreptele g' și d determină un plan paralel cu g. Cu aceasta am demonstrat existența. Unicitatea se demonstrează prin metoda reducerii la absurd.

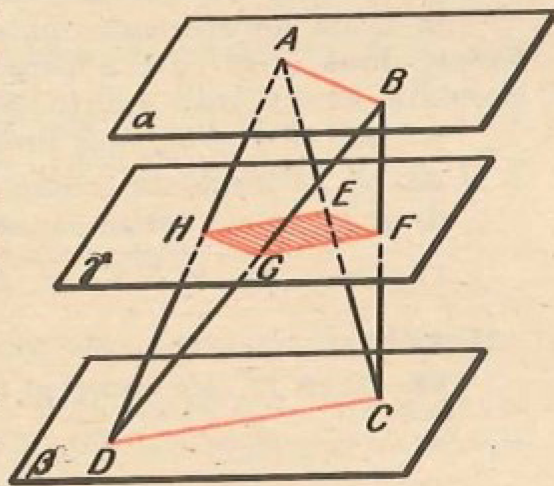


Fig. R.6

8. „Dacă un plan α taie două plane β și γ după două drepte paralele, atunci β și γ sînt paralele" este o afirmație falsă. Planele β și γ se pot întîlni după o dreaptă paralelă cu α...

9. $(ABD) \parallel (MNP)$.

10. Din triunghiurile ABC și ABD (fig. R.6) rezultă că $EF \parallel AB$ și $HG \parallel AB \Rightarrow EF \parallel HG$, iar din triunghiurile AGD și $BCD: EH \parallel CD$ și $FG \parallel CD \Rightarrow EH \parallel FG$. Deci $EFGH$ este paralelogram.

11. a) $MN \parallel AC$ și $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$, $PQ \parallel AC$ și $PQ = \frac{1}{2} \cdot AC$. Rezultă deci că $MNPQ$ este paralelogram. În mod analog, folosind teorema liniei mijlocii în triunghi, se arată și despre celelalte patrulatere de la pct. b) și c) că sînt paralelograme. d) Paralelogramele $MNPQ$ și $MRPS$ au diagonala MP comună. Deci RS trece prin mijlocul lui MP. Analog, $MRPS$ și $NRQS$ au diagonala RS comună, deci NQ trece prin mijlocul lui RS. Cum MP, NQ și RS au mijloacele în același punct, rezultă că sînt concurente.

12. $\left.\begin{array}{l} MN \text{ este linie mijlocie în triunghiul } ABC: MN = \dfrac{AC}{2} \\ PQ \text{ este linie mijlocie în triunghiul } DAC: PQ = \dfrac{AC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow MN \equiv PQ.$

Analog se demonstrează că: $MQ \parallel NP$ și $MQ \equiv MP$.

13. Nu neapărat. Pot fi ambele paralele cu două drepte paralele. Ele se pot intersecta după o dreaptă paralelă cu dreptele. Dacă adăugăm condiția ca dreptele inițiale să nu fie paralele, afirmația devine adevărată.

14. Din enunț rezultă că $d \parallel a$ și $d \parallel b$. Locul geometric este planul determinat de d și c, deci planul care conține pe c și este paralel cu a și cu b.

PROBLEME 4 (pagina 23)

1. $AB = 7{,}5$ cm, $BC = 4{,}5$ cm.

2. Oricare dintre plane conține paralela prin A la d.

3. Fie $\{B\} \in \alpha$ și M mijlocul lui AB. Locul geometric este planul ce conține pe M și este paralel cu α.

4. Soluția este similară cu cea a problemei precedente.

5. a) O dreaptă paralelă cu d și g; b) Un plan paralel cu d și g.

6. a) Linia mijlocie a trapezului $APQB$; b) Un paralelogram și interiorul său...

7. Dacă d_1, d_2, d_3, d_4 sînt cele patru drepte și A, B, C, D, respectiv A', B', C', D' sînt punctele în care ele intersectează două plane oarecare α și β, iar BC este paralel și congruent cu AD, atunci planele (BCB') și (ADA') sînt paralele. Presupunem că $B'C'$ nu este paralelă cu $A'D'$, atunci $B'C' \cap A'D' = \{M\} \Rightarrow \{M\} \in (BCB')$ și $\{M\} \in (ADA') \Rightarrow$ $\Rightarrow \{M\} \in (BCC') \cap (ADA')$, ceea ce contrazice concluzia de mai sus.

8. Două drepte concurente determină un plan. Acest plan este intersectat de două plane, după două drepte paralele. Deci, patrulaterul inscriptibil $ABCD$ are două laturi paralele. El este deci dreptunghi sau trapez isoscel.

9. Nu, vezi problema precedentă.

10. a) Se formează triunghiuri ale căror unghiuri au laturile respectiv paralele.
b) și c) Se va folosi raportul de asemănare al triunghiurilor.

11. Dacă $A', A'' \in \alpha$; $B', B'' \in \beta$, iar C' și C'' satisfac relațiile $\frac{A'C'}{C'B'} = 3$, $\frac{A''C''}{C''B''} = 3$, atunci locul geometric este planul $(CC'C'')$, paralel cu α.

12. Dacă R este punctul în care d intersectează planul θ, atunci:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = \frac{A'R}{RB'} \cdot \frac{B'R}{RC'} \cdot \frac{C'R}{RD'} \cdot \frac{D'R}{RA'} = 1.$$

PROBLEME 5 (pagina 28)

1. Dacă dreptele a, b, c, sînt toate trei coplanare, perpendicularele OA, OB și OC se găsesc în planul perpendicular pe planul determinat de a, b, c și care conține pe O. Dacă a, b, c sînt necoplanare și planul (OAB) ar fi diferit de (OBC), ar rezulta că prin punctul O s-ar duce două plane perpendiculare pe b, ceea ce este imposibil. Deci dreptele OA, OB și OC sînt coplanare numai dacă dreptele a, b, c sînt toate trei coplanare.

2. Punctul O este mijlocul lui AB. 3. Răspunsul este afirmativ.

4. $OB \perp g$.

5. $AB \perp (ACN)$.

6. Planul perpendicular în O (mijlocul lui AB), pe AB.

7. Dacă A, B și C sînt cele trei puncte necoliniare, locul geometric căutat este dreapta de intersecție a planelor mediatoare ale segmentelor AB și BC (prin care trece și planul mediator al segmentului CA).

8. Punctul de intersecție al dreptei determinate la problema precedentă cu planul mediator al segmentului CD. (Am considerat cele patru puncte necoplanare A, B, C, D.)

9. Din triunghiurile dreptunghice $A'AC$ și $B'BC$ rezultă că $AC = 7$ cm, $BC = 7$ cm, deci $AB \equiv BC \equiv CA$.

10. Din triunghiul dreptunghic $B'BC$ rezultă că $BC = a$, deci $AB \equiv AC \equiv BC$.

11. Cateta AC, rămînînd perpendiculară pe AB, este conținută în planul perpendicular în A pe AB. Locul geometric este un cerc de centru A și rază AC, situat în planul menționat mai sus.

12. Prin A' ducem paralela la AB, care intersectează pe BB' în B''. În mod analog, prin A' se duce paralela la AC, care taie pe CC' în punctul C'' etc. Din triunghiul $A'B''B'$: $A'B' = 5$, în mod analog se găsesc: $A'C' = 7$, $A'D' = 10$, $B'C' = 2\sqrt{5}$, $B'D' = \sqrt{57}$ și $C'D' = \sqrt{41}$.

13. a) $AA' \perp OA \Rightarrow OA = 12$ m; b) Un cerc cu centrul în punctul O', situat pe perpendiculara în O pe planul cercului dat și avînd raza de 6 m. (Locul geometric este conținut într-un plan paralel cu planul cercului dat.)

14. $AB = 12$ cm, $BC = 3$ cm.

15. O dreaptă perpendiculară pe planul cercului în punctul O, centrul său.

16. O dreaptă perpendiculară pe planul pătratului dusă în punctul O de intersecție a diagonalelor lui.

17. Fie α planul perpendicular pe b dus prin a și care intersectează pe b în A. Se duce prin punctul A dreapta c, paralelă cu a. Avem $b \perp c \Rightarrow b \perp a$. Deci, cele două drepte date (a și b) trebuie să fie perpendiculare.

18. Fie M un punct pe d_1. Prin M ducem planul α, care este perpendicular pe d_2, apoi în M ridicăm o perpendiculară a pe α. Rezultă că $a \parallel d_2$ și că $a \perp d_1$, ceea ce înseamnă că d_1 trebuie să se găsească, în întregime, în planul α, care este planul căutat.

19. Dacă d_1 și d_2 sînt perpendiculare, ducem perpendiculara comună d_3 a lui d_1 și d_2 și planul (d_2, d_3) este cel căutat.

20. Intersecția lui α cu planul perpendicular pe d care trece prin A.

PROBLEME 6 (pagina 32)

1. Ducem înălțimea AD a triunghiului ABC. Avem: $BC \cdot AD = AB \cdot AC \Rightarrow AD = 24$ cm. Știind că $MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp AD$ și $MD \perp BC$. Din triunghiul dreptunghic MAD rezultă că $MD = 26$ cm.

2. Dacă D este mijlocul segmentului AB, $OD = 4$ cm, iar $MD = 5$ cm.

3. Paralela prin E la BC taie pe AB în M și pe CD în M', iar paralela prin E la AB taie pe AD în N și pe BC în N'; $EM = 3 \cdot \frac{1}{3}$ cm $= 1$ cm; $EN = 9 \cdot \frac{1}{3}$ cm $= 3$ cm; $FM = \sqrt{5^2+1} = \sqrt{26}$ (cm); $FN = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ (cm^3), $FM' = \sqrt{5^2 + 2^3} = \sqrt{29}$ (cm), $FN' = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$ (cm).

4. Fie $ABCDEF$ hexagonul dat. Vom observa că distanțele lui M la EF, ED și respectiv BC și DC sînt egale. Deci, vom calcula numai distanțele lui M la BC și DC. Fie P piciorul perpendicularei din M pe BC; $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MP = \sqrt{b^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{2}$. Se observă că $AC \perp CD$, și deci, $MC = \sqrt{b^2 + 3a^2}$ (evident distanța lui M la AB și AF este b).

5. Hexagonul are 9 diagonale. Nu vom mai calcula distanțele lui M la cele trei diagonale care pornesc din A. De asemenea, vom observa că distanțele lui M la BE și BD sînt respectiv egale cu cele la FC și FD. Vom calcula distanțele d_1, d_2, d_3, d_4, ale lui M la BF, BE, BD și EC, găsim: $d_1 = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{2}$; $d_2 = \frac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{2}$; $d_3 = \sqrt{b^2 + a^2}$; $d_4 = \frac{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}{2}$.

6. Din triunghiul dreptunghic ADM, $AM = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$. Din triunghiul, de asemenea, dreptunghic MDC, $MC = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$. Deci $MA = MC$.

7. Fie O centrul cercului şi α planul său şi tangenta NP. Avem: $MO \perp \alpha$ şi $ON \perp NP \Rightarrow MN \perp NP$.

8. a) Notăm $AA' = x$; x — va fi soluţie a ecuaţiei:

$$2a^2 + a^2 + (a - x)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{3a}{2};$$

b) x va fi soluţie a ecuaţiei: $a^2 + (a - x)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$.

9. Un cerc conţinut în planul α cu diametrul AP, P fiind piciorul perpendicularei din B pe α.

10. a) Dacă B este piciorul perpendicularei din A pe d, picioarele perpendicularelor din A pe planul mobil sînt conţinute în planul perpendicular pe d în B; b) Locul geometric este un cerc de rază $\frac{AB}{2}$ şi cu centrul în O, mijlocul lui AB; c) Un segment AA' pentru care d este mediatoare.

11. $BC \perp AD$ şi $BC \perp OD \Rightarrow BC$ este perpendiculară pe planul determinat de AD şi OD, deci pe orice dreaptă din acest plan. În particular, $BC \perp AO$, deci O se află pe înălţimea din A.

12. $MA' \perp BC$, $MH \perp (ABC) \Rightarrow HA' \perp BC$. Cum H aparţine înălţimii din A rezultă că $AA' \perp BC$. Analog pentru BB', CC'.

13. $AB \perp \alpha$, $BD \perp d \Rightarrow AD \perp d$ ($\sphericalangle ADH = 90°$), $AB \perp \alpha$, $BG \perp g \Rightarrow AG \perp g$ ($\sphericalangle AGH = 90°$).

PROBLEME 7 (pagina 39)

1. $BD = 9$ cm. 2. $4\sqrt{2}$ cm.

3. Fie M şi N picioarele perpendicularelor din D şi B pe AC (fig. R. 7). $DB = \sqrt{DM^2 + MB^2} = \sqrt{DM^2 + MN^2 + NB^2} = \frac{\sqrt{337}}{5}$ (cm).

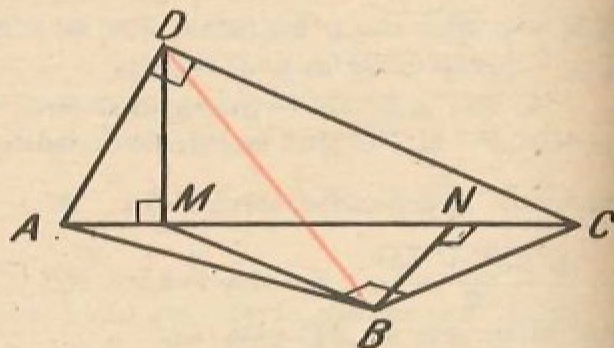


Fig. R.7

4. $BC = \sqrt{34}$ cm. 5. $BD = a\sqrt{3}$.

6. $MN = 4$ m. 7. Un plan paralel cu cele două drepte, situat la egală depărtare de acestea.

8. Două plane perpendiculare pe planul celor două drepte, şi care conţin bisectoarele unghiurilor formate de aceste drepte.

9. Un plan care conţine dreapta de intersecţie a planelor date şi care se numeşte „plan bisector".

10. Două plane bisectoare se taie după o dreaptă. Se va arăta că această dreaptă este conţinută şi în cel de-al treilea plan bisector.

11. Fie OM perpendiculara dusă pe planul ABC. Planul COM este perpendicular pe ABC. Dacă $ON \perp AB$, conform unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare, $MN \perp AB$.

12. Se notează cu a lungimea catetelor triunghiului dreptunghic dat. Se calculează distanţa BC, după îndoire, şi se găseşte $BC = a$. Cum $AB \equiv AC$, $AB = a$, rezultă că, după îndoire, triunghiul ABC este echilateral.

13. $AP' \equiv PP'$.

14. Într-un punct $A \in d \subset \alpha$, ducem $a \perp d$. Planul (a, d) este cel căutat. Unicitatea: Presupunem existenţa a două plane care intersectate cu al treilea contrazic unicitatea perpendicularei pe o dreaptă în acest plan.

15. Se foloseşte definiţia planelor perpendiculare.

16. Raţionament asemănător cu cel de la construcţia perpendicularei dintr-un punct pe un plan.

PROBLEME 8 (pagina 43)

1. Proiectantele AA', BB', CC' sînt paralele şi deci determină, pe orice secantă, segmente proporţionale.

2. Se aplică rezultatul problemei precedente.

3. Dreptele a' şi b' sau sînt paralele, sau coincid. Sînt paralele, cînd planul lor este neparalel cu planul pe care se face proiecţia şi coincid, cînd planele sînt perpendiculare.

4. Medianele lui ABC se proiectează pe medianele lui $A'B'C'$.

5. $A'B \equiv A'C$, $A'B = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} \widehat{A'BA} = 1$.

6. $AB \equiv AC \equiv A'C'$, $AB = a\sqrt{2}$, $AA'C'C$ este un dreptunghi $\Rightarrow CC' = a$.

7. Se demonstrează că $AB \not\equiv AC$. Dacă $AB \equiv BC$, $\cos \widehat{ABC} = \frac{16}{25}$ şi $AC = 3\sqrt{2}$ cm. Dacă $AC \equiv BC$, $\cos \widehat{ABC} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ şi $AB = 4\sqrt{2}$ cm.

PROBLEME 9 (pagina 52)

1. a) $5\sqrt{2}$ cm; b) $5\sqrt{3}$ cm; c) 5 cm.

2. Se aplică una din reciprocele teoremei celor trei perpendiculare.

3. a) $A'D = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; b) $\cos \widehat{ACA'} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. Se formează două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente.

5. a) $D'A \perp AB$ (conform uneia dintre reciprocele teoremei celor trei perpendiculare), $C'D' \parallel AB$; b) $AB = 5$, $AD' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $D'C' = 2$, $BC' = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

6. $\operatorname{tg} u = \frac{4}{5}$.

7. Se va observa că triunghiul $B'AC$ este dreptunghic isoscel $AB' = AC' = 3\sqrt{2}$, $\cos \widehat{BAC'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sphericalangle BAC' = 45°$.

8. 9 cm.

9. a) $BD = a$, $DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; b) $A'D^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$; c) $\cos \widehat{ABA'} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+3}{6}}$, $\cos \widehat{ACA'} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

10. 60°.

11. $\frac{3(9+4\sqrt{3})}{4}$ cm².

12. a) 45°; b) $S' = S\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $u = 60°$; $\mathcal{A} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

14. $OO' = 14$ cm.

PROBLEME 10 (pagina 62)

1. $\mathcal{V} = 80$ cm³.

2. $\mathcal{V} = 160\sqrt{3}$ cm³.

3. a) $\mathcal{V} = 4{,}8$ m³; b) $\mathcal{A}_t = 6(2{,}4 + \sqrt{2})$ m²; c) 45°.

4. $\mathcal{A}_t = 42$ m², $\mathcal{V} = 12$ m³.

5. a) Se aplică teorema celor trei perpendiculare; b) $\mathcal{V} = 320$ cm³.

6. $\mathcal{V} = 96\sqrt{3}$ cm³.

7. Triunghi echilateral cu latura $l = \frac{a}{2}$; $\mathcal{A} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

8. $\mathcal{A}_t = a^2\sqrt{3}$, $\mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

9. Se obține un hexagon din care lipsesc două triunghiuri echilaterale.

10. Trapez.

11. Dreapta de intersecție a planelor (ABA) și (ACA') se intersectează cu OO' într-un punct G.

12. Se aplică teorema celor trei perpendiculare și se ține seama că intersecțiile a două plane perpendiculare pe un al treilea este o dreaptă perpendiculară pe acesta.

13. Toate trec printr-un punct egal depărtat de cele patru vîrfuri.

14. Muchia comună a celor două unghiuri drepte este perpendiculară pe planul celorlalte două muchii respective și se aplică teorema celor trei perpendiculare.

15. Notăm: $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Rezultă că $S_{OAC} = \frac{ac}{2}$, $S_{OAB} = \frac{ab}{2}$, $S_{OBC} = \frac{bc}{2}$. Fie CD o înălțime a triunghiului ABC. Atunci, $OD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$CD = \sqrt{c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ și } S_{ABC} = \frac{\sqrt{a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2}}{2}.$$

16. Din B ducem BE, înălţimea triunghiului BCD ($E \in CD$). Se demonstrează că $CD \perp (ABE)$ şi apoi că $(BCD) \perp (ABE)$, rezultînd astfel că înălţimea din A a tetraedrului cade pe BE.

Fie H piciorul înălţimii din A. Dacă, în plus, $AC \perp BD$, atunci $H \in CF$ (CF fiind înălţimea feţei BCD). Deci $BC \perp (DHA)$ şi $BC \perp AD$.

Laturile opuse ale tetraedrului fiind respectiv perpendiculare, picioarele înălţimilor tetraedrului sînt ortocentrele feţelor.

PROBLEME 11 (pagina 61)

1. $\mathcal{A}_l = 24 \text{ cm}^2$.

2. a) G şi S împart în acelaşi raport medianele triunghiurilor $AB'C$ şi MNP; b) Dacă D şi E sînt mijloacele lui BC şi NP, $DE = 9$ cm, fiind linie mijlocie în trapezul $BCPN$. Se duce $MF \parallel AD$. Dacă $MF \cap SG = \{L\}, LG \equiv DF \equiv AM$, $AM = 6$ cm, $FE = 3$ cm. În triunghiul MFE: $SL \parallel EF$, $\frac{LS}{FE} = \frac{MS}{ME} = \frac{2}{3}$, $LS = 2$ cm, $SG = 8$ cm;

c) $SG = \frac{a+b+c}{3}$.

3. Mijloacele muchiilor menţionate sînt conţinute în secţiunea realizată de un plan ce trece prin mijloacele segmentelor AA', $A'B'$, $A'D$. Oricare din laturi se calculează ca linie mijlocie într-un triunghi cu baza o diagonală a unei feţe.

4. Triunghi, patrulater, pentagon.

5. Idem cu 4, plus hexagon.

6. a), b) se formează un paralelogram.

7. Se exprimă fiecare sumă în funcţie de distanţa dintre punctele de intersecţie ale diagonalelor bazelor şi α.

PROBLEME 12 (pagina 63)

1. a) 13 cm; b) $\frac{60}{13}$ cm.

2. a) 192 cm²; b) $BD' = 2\sqrt{57}$ cm, $AC' = 10$ cm.

3. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. $(384 + 60\sqrt{3})$ cm².

5. a) $BB'CC'$; b) $BD \perp AC'$.

6. Se calculează AQ ca proiecţie a catetei AD din triunghiul dreptunghic ADC'.

7. Dacă $A'Q \perp AD'$, din triunghiul dreptunghic $B'A'Q \Rightarrow B'Q = 15$ cm.

8. 104 cm².

9. Un triunghi cu dimensiunile de 25 cm, $5\sqrt{34}$ cm şi $15\sqrt{5}$ cm.

10. 7 cm, 3 cm.

11. $d_1 = \sqrt{h^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$, $d_2 = \sqrt{h^2 + 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$.

13. 4 cm, 6 cm, 10 cm.

14. Se construieşte cubul cu un vîrf în A şi muchii AB, AC, AA'. Se observă că $A'D$ este diagonala feţei paralelă cu (ABC). $AD = a\sqrt{3}$. Din triunghiurile dreptunghice ADB şi $ADC \Rightarrow BD = a\sqrt{2}$ şi $DC = a\sqrt{2}$.

PROBLEME 13 (pagina 67)

1. $\mathcal{V} = 144\sqrt{3}$ cm³.

2. $\mathcal{V} = 240\sqrt{3}$ m³.

3. $\mathcal{A}_t - \mathcal{A}_l = 2\mathcal{A}_B$; $\mathcal{A}_B = 12\sqrt{3}$ m²; $\mathcal{V} = 300\sqrt{2}$ m³.

4. $\mathcal{V} = 90\sqrt{2}$ m³.

5. $\mathcal{V} = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$.

6. $\mathcal{V} = \dfrac{a^2b}{2}$.

7. $\mathcal{V} = 16 \cdot 12 \cdot 3{,}2 - \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 3{,}2}{2 \cdot 3} = 608$ (cm³), $\mathcal{A}_t = 556$ cm².

8. $\mathcal{V} = 360$ cm³.

9. EB este diametrul cercului circumscris bazei. $EB = 10$ cm, $BB' = 24$ cm, $\mathcal{V} = 900\sqrt{3}$ cm³, $\mathcal{A}_l = 720$ cm².

10. $FF' = 6$ cm, $\mathcal{A}_t = 108\,(2 + \sqrt{3})$ cm², $\mathcal{V} = 324\sqrt{3}$ cm³.

11. a) Se consideră triunghiul dreptunghic AOA', $A'O = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm, $\mathcal{V} = 96$ cm³; b) $\operatorname{tg} u = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} : \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2}{3}$.

12. Volumul de apă care se scurge din vas este egal cu volumul unei prisme ce are ca bază un triunghi dreptunghic cu catetele de 4 cm şi 8 cm şi ca înălţime, latura pătratului. $\mathcal{V}_1 = 128$ cm³, $\mathcal{V}$ apă rămasă $= 768 - 128 = 640$ (cm³); $h = 640 : 64 = 10$ (cm).

13. Latura bazei este egală cu $2a \sin 15°$,

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2 \sin^2 15°}{(\sqrt{3})^2}} = a\sqrt{\frac{3 - 4\sin^2 15°}{3}}.$$

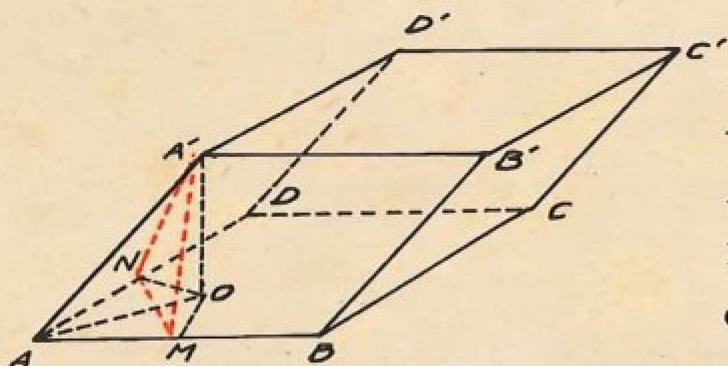


Fig. R.8

14. Priviţi în figura R.8: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle DAA'$, $\sphericalangle BAD = 60°$. $M \in AB$, $A'M \perp AB$, $N \in AD$, $A'N \perp AD$, $A'M \equiv A'N$, $A'M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AM = \dfrac{a}{2}$.

Ducem $A'O \perp (ABD)$, $(O \in (ABD))$, $OM \perp AB$; $OM = \dfrac{OA}{2}$, $OA^2 - OM^2 = AM^2$, $OA^2 - \dfrac{OA^2}{4} = AM^2$, $\dfrac{3}{4}OA^2 = \dfrac{a^2}{4}$, $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $A'O = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}}$, $A'O = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $\mathcal{V} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

15. Aria corpului a rămas aceeaşi. Volumul corpului s-a micşorat cu $\dfrac{a^3}{8}$.

16. $MD \equiv ND$, $MD = 5$ m, $l = 10$ m, $\mathcal{V} = 1\,000$ m³, $\mathcal{A}_t = 600$ m².

17. Fie P mijlocul lui BC. Avem: $AN^2 = AP^2 + NP^2 = \dfrac{9l^2}{4}$, $l = 2$ dm, $\mathcal{V} = 8$ dm³.

18. $\mathcal{A}_t = 94$ m².

19. Se obțin două prisme triunghiulare drepte și un paralelipiped dreptunghic, $\mathcal{V}_1 = \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot 10 = 125$ (m³), $\mathcal{V}_2 = 400$ cm³, $\mathcal{V}_3 = 300$ cm³. $\mathcal{A}_1 = 25(5 + 2\sqrt{2})$ cm², $\mathcal{A}_2 = 340$ cm², $\mathcal{A}_3 = 360$ cm².

PROBLEME 14 (pagina 74)

1. 288 cm²;

2. 1,8 m și 4 m.

3. $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

4. $\sqrt{1\,945}$ cm, $\sqrt{793}$ cm, 3 552 cm².

5. $\sqrt{61}$ m, $\frac{13}{2}$ m, $\frac{135\sqrt{3}}{2}$ m²;

6. $36\sqrt{133}$ cm², $36(\sqrt{133} + 6\sqrt{3})$ cm², 5 cm.

7. a) $M \in VA$, $BM \perp VA$, $\sin \widehat{BMD} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \widehat{BMD} = -\frac{1}{3}$; b) $E \in AB$, $AE \equiv EB$, $F \in CD$, $CF \equiv FD$, $\sin \widehat{EVF} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \widehat{EVF} = \frac{1}{3}$; c) 45°.

8. Se arată că triunghiurile ANC și BMD sînt isoscele.

9. a) $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $a_p = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos u = \frac{1}{3}$; b) $d = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}} - x}{3}$; c) Suma distanțelor este $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

10. Secțiunea formată S' este un triunghi asemenea cu VBC. Se utilizează faptul că raportul ariilor este egal cu pătratul raportului de asemănare.

11. $\mathcal{A}_l = 16\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$ cm².

12. a) $a^2, \frac{a^2\sqrt{2}}{2}, a^2\sqrt{2}$; b) a^3.

13. a) $MD = \frac{1}{2} \cdot VB = MB$; b) ducem înălțimea $NP(N \in BC, P \in AD)$, prin O, a paralelogramului; $\sphericalangle MNO \equiv \sphericalangle MPO$.

14. $3a^2$.

15. Trapez.

16. $3 = 2 + 1$ și două muchii aparțin, fie bazei, fie sînt muchii laterale, concurente fiind, determină un plan.

17. a) $64\sqrt{7}$ cm², $\frac{256\sqrt{6}}{3}$ cm³; b) $8\sqrt{3}$ cm³.

18. a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm; c) $\mathcal{A}_l = 2$ cm², $\mathcal{A}_t = 3$ cm².

19. a) AP, CP sînt mediane în triunghiuri dreptunghice cu aceeași ipotenuză (SB), $\frac{a^2\sqrt{5}}{2}$; b) $a^2(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2})$.

20. a) $6\sqrt{41}$, 24; b) $\cos \widehat{MOB} = 0{,}8$.

21. Se consideră ca bază a piramidei o față laterală. Se ține seama întîi că din toate piramidele cu aceeași bază și cu muchia laterală constantă, cea cu volum maxim este cea în care muchia laterală este înălțime; apoi, că din toate triunghiurile isoscele cu laturile congruente de lungime constantă, cel de arie maximă este triunghiul dreptunghic. Se găsește $x = a\sqrt{2}$.

22. $\frac{\mathcal{A}'_t}{\mathcal{A}_t} = \frac{\mathcal{A}'_l}{\mathcal{A}_l} = \frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{2}$, (unde x este distanța de la vîrf la plan), $x = \frac{h}{\sqrt{2}}$.

23. a) $\frac{2\sqrt{39}}{3}$ cm; b) $\frac{14\sqrt{13}}{3}$ cm³.

24. $36\sqrt{3}$ m³.

25. $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{FPQ} \cdot HE$, $\left(\mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}\right)$.

26. Se exprimă volumul piramidei în două moduri: o dată cu baza triunghiul echilateral și o dată ca sumă de două piramide cu baza S. $\left(S = \frac{75\sqrt{3}}{13} \text{ cm}^2\right)$.

27. $\frac{8\sqrt{3 - 4\sin^2 15^\circ}}{3 \sin 15^\circ}$ sau $\frac{16}{3}\sqrt{12\cos^2 15^\circ - 1}$.

28. Se calculează volumul în două moduri: $\mathcal{V} = \frac{30 \cdot 40 \cdot 70}{6}$ cm³ $= 14\,000$ cm³ și $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC} \cdot h$. Se obține: $h = \frac{42\,000}{\mathcal{A}_{ABC}}$, $h = \frac{840}{37}$ cm.

29. b) 1; d) poziția dată în enunț.

30. Fie M, N intersecțiile dreptelor AA' și DD', respectiv BB' și CC'. Ducînd prin M și N plane perpendiculare pe (ABC) și paralele cu AD, acoperișul se descompune în două piramide (cu bazele dreptunghiuri congruente și avînd ca înălțime distanța dreptei MN la planul (ABC) și o prismă cu baza un triunghi isoscel și înălțimea NM).

Pentru determinarea dimensiunilor necunoscute se folosește asemănarea. Se găsește înălțimea acoperișului $\frac{a\sqrt{23}}{4}$ și lățimea bazelor piramidelor $\frac{3a}{4}$. Volumul căutat este $\frac{3a^3\sqrt{23}}{16}$.

31. $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ m³.

32. a) $a^3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$; b) Se arată că $VA^2 + VC^2 = AC^2$; c) Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul $VA'O'$ (O' centrul pătratului $A'B'C'D'$) și se găsește $a = 3$ m.

33. $\frac{16}{3}$ m³.

34. 1 cm³.

35. a) 4 dm³; b) $\sin u = 3\sqrt{0,1}$.

36. $100\sqrt{3}$ dm², $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ dm³.

37. a) figura R.9; b) $a\sqrt{3}$; c) 30°, 60°, 90°.

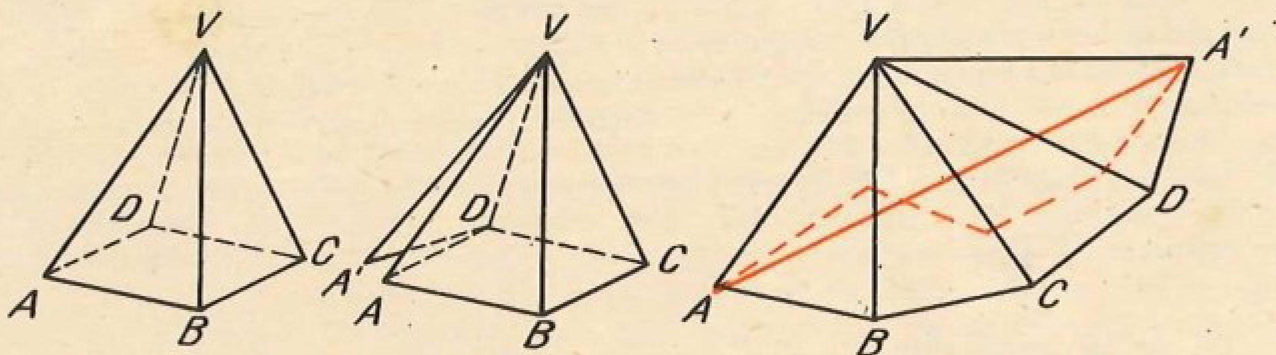


Fig. R.9

38. Punct interior egal depărtat de vîrfuri.

PROBLEME 15 (pagina 81)

1. $a_p = \sqrt{25 - \left(\frac{6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - 12} = \sqrt{13}$; $h = \sqrt{25 - (R - r)^2}$, unde R şi r sînt razele cercurilor circumscrise bazelor ($R = 6$ m, $r = 2$ m, $h = 3$ m), $\mathcal{A}_l = 12\sqrt{39}$ m², $\mathcal{V} = 39\sqrt{3}$ m³.

2. $I = \frac{h \cdot L}{L - l}$.

3. $\frac{70}{3}$ cm³.

4. a) $\mathcal{V} = 168\sqrt{3}$ cm³; b) $\mathcal{A}_l = 36\sqrt{21}$ cm².

5. Notăm cu $\mathcal{V}_1$ volumul piramidei înlăturate şi cu $\mathcal{V}$ volumul piramidei mari. Evident, $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{8} \cdot \mathcal{V}$; $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$; $\frac{H - h}{H} = \frac{1}{2}$; $H - h = \frac{H}{2}$; $H - h = 4$ cm; $h = 4$ cm.

6. $63\sqrt{3} = \frac{h}{3} \cdot (36\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 18\sqrt{3})$, $h = 3$ cm. Se calculează apoi şi celelalte dimensiuni: $a_p = 2\sqrt{3}$ cm, muchia $= \sqrt{21}$ cm, $\mathcal{A}_l = 54\sqrt{3}$ cm².

7. $l = 4$ m. Apotema trunchiului de piramidă este de 8 m. Se formează triunghiul dreptunghic care are ca ipotenuză apotema trunchiului şi catetele: înălţimea trunchiului

şi $(R - r)$: 2. Obţinem: $h = \sqrt{61}$ m, $S = 25\sqrt{3}$ m², $s = 4\sqrt{3}$ m², $\mathcal{V} = 13\sqrt{183}$ m³, muchia laterală $= \sqrt{73}$ m.

8. Dacă se notează trunchiul cu $ABCDA'B'C'D'$, se consideră trapezul isoscel $ACC'A'$, în care se cunosc bazele şi diagonala. Înălţimea trapezului este înălţime şi pentru trunchiul de piramidă. $\mathcal{A}_l = 24\sqrt{10}$ m², $\mathcal{V} = 109$ m³.

9. $\mathcal{A}_B = 32\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{A}_b = 18\sqrt{3}$ cm²; $h = 24\sqrt{3}$ cm, $\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B}$, $\frac{H-4}{H} = \frac{3}{4}$, $H = 96\sqrt{3}$ cm.

10. Muchiile laterale ale piramidei fiind congruente, piciorul înălţimii este centrul cercului circumscris trapezului. Unghiurile ascuţite ale trapezului fiind de cîte 60°, diagonalele lui sînt cît latura triunghiului echilateral înscris în cerc. Muchiile laterale formînd cu planul bazei unghiuri de cîte 45°, rezultă că înălţimea piramidei este cît raza cercului circumscris trapezului. Se găseşte că înălţimea piramidei este de $\frac{2\sqrt{39}}{3}$ cm, iar volumul trunchiului de piramidă $\frac{49\sqrt{13}}{12}$ cm³.

11. Se foloseşte relaţia $\frac{p \cdot a}{P \cdot A} = \frac{1}{2}$ (p, a fiind perimetrul şi apotema piramidei mici şi P, A ale celei mari). Dacă notăm cu x distanţa de la vîrf la secţiunea în piramidă: $\frac{x^2}{144} = \frac{1}{2}$. De unde, $x = 6\sqrt{2}$ cm.

12. $h^2 = (4a)^2 - \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2$, h fiind înălţimea trunchiului de piramidă, $\mathcal{A}_l = \frac{72 + 5\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$, $\mathcal{V} = \frac{7\sqrt{191}}{24} \cdot a^3$.

13. Apotema trunchiului este $A = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$ m. Se calculează apoi înălţimea trunchiului, din triunghiul dreptunghic care are ipotenuza A şi catete: înălţimea h şi $A' - a'$, unde A' şi a' sînt apotemele bazelor. Se găseşte $h = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}$ m şi $\mathcal{V} = \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{12}$ m³.

14. Dacă notăm cu H înălţimea piramidei din care face parte trunchiul şi cu h înălţimea trunchiului, putem scrie: $\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2}$ şi $\left(\frac{H - \frac{h}{2}}{H}\right)^2 = \frac{S}{S_2}$. Din prima relaţie se scoate $h = \frac{H(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1})}{\sqrt{S_2}}$. Avem: $\frac{H - \frac{h}{2}}{H} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2\sqrt{S_2}}$, iar relaţia a doua devine: $\left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2\sqrt{S_2}}\right)^2 = \frac{S}{S_2}$ sau $S = \frac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{4}$.

15. Dacă se notează cu x înălţimea piramidei mici, avem: $\frac{x}{I+x} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}$. De unde: $\frac{x}{I} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$ sau $x = \frac{I\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$. Înălţimea H a piramidei este: $H = \frac{I\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$, iar volumul: $\mathcal{V} = \frac{IS\sqrt{S}}{3(\sqrt{S}-\sqrt{s})}$.

PROBLEME 17 (pagina 89)

1. Planul bisector şi orice plan perpendicular pe muchia comună.

2. Planele bisectoare ale celor patru diedre formate (sînt două plane perpendiculare) şi orice plan perpendicular pe intersecţia lor, în cazul cînd planele iniţiale nu sînt paralele, iar, în cazul cînd planele sînt paralele, un plan paralel cu ele, situat între ele, la distanţe egale de acestea şi orice plan perpendicular pe ele.

3. Dacă planele sînt secante, axa de simetrie este muchia lor comună sau orice dreaptă dintr-un plan bisector, perpendiculară pe muchia lor comună; dacă planele sînt paralele, axa de simetrie este orice dreaptă perpendiculară pe ele sau conţinută în planul echidistant.

4. Are un centru de simetrie, $3 + 6 = 9$ axe de simetrie şi $3 + 6 = 9$ plane de simetrie.

5. Nu are nici un centru de simetrie, şase plane de simetrie, trei axe de simetrie.

6. Cele cu număr par de laturi la poligonul de bază. Plane de simetrie sînt n la cele cu un număr impar (n) de laturi la poligonul de bază şi $2n$ la cele cu un număr par (n) de laturi ale poligonului de bază. Axe de simetrie au numai prismele cu număr par de laturi ale bazei.

7. Piramidele regulate cu număr n par de laturi ale poligonului de bază au $2n$ plane de simetrie. Cele cu n impar, au n plane de simetrie. Ambele au o singură axă de simetrie.

8. Locul geometric al lui P este o dreaptă $p \parallel d$. Locul geometric al lui Q' este o dreaptă $q \parallel d$. Rezultă că $p \parallel q$, deci coplanare. Atenţie! Nu orice punct al acestui plan aparţine acestor locuri geometrice.

9. Rotim triunghiul ABC în jurul lui BC pînă cînd punctul A ajunge în planul de proiecţie. Punctul A' va fi interior triunghiului ABC, $AA' \cap BC = M$. Exprimăm unghiurile A şi A' ca sume de două unghiuri (din care cele din A' sînt exterioare triunghiului).

PROBLEME 18 (pagina 104)

1. Cu notaţiile din figura R.10, $\triangle ADM$ este echilateral, deci generatoarea $AD = a$ şi $AB = a\sqrt{3} = 2\pi R$, de unde $R = \frac{a\sqrt{3}}{2\pi}$. Problema admite şi o a doua soluţie: $G = a\sqrt{3}$ şi $R = \frac{a}{2\pi}$.

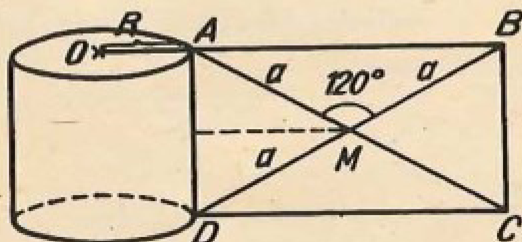


Fig. R.10

2. 60°.

3. $B'A = \sqrt{4r^2 + g^2}$.

4. $\frac{40}{3}$

5. 6 cm.

6. Din figura R.11 se ajunge la: $8\pi = 2x\pi$, deci $x = 4$ cm.

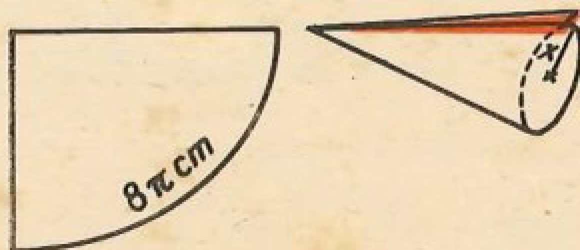


Fig. R.11

7. 8 cm și 4 cm.

8. O pînză conică în care generatoarea face cu d un unghi θ.

9. Planul este tangent la sferă. Distanța de la centru la plan este egală cu raza, (10 cm).

10. $d = 0{,}25\sqrt{3}$ m.

11. a) Una interioară celeilalte; b) exterioare; c) secante; d) imposibil: sfera a doua are raza negativă.

12. Două soluții: 7 cm sau 1 cm.

13. O sferă de diametru AB.

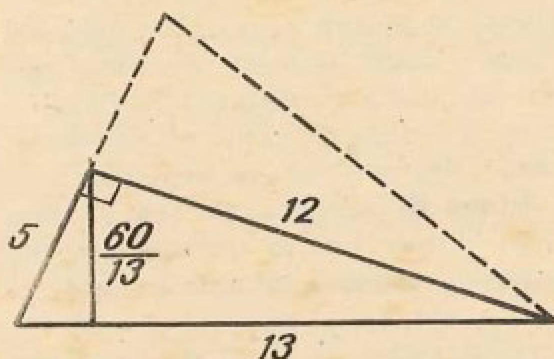


Fig. R.12

PROBLEME 19 (pagina 112)

1. $r = 6$ cm, $\mathcal{V} = 16\,200\pi$ cm^3.

2. $R = 4$ dm, $\mathcal{V} = 40\pi$ dm^3.

3. $\mathcal{V} = 96\pi$ cm^3.

4. Figura R.12 $\mathcal{V}_1 = 100\pi$ cm^3, $\mathcal{V}_2 = 240\pi$ cm^3, $\mathcal{V}_3 = \frac{1\,200}{13}$ cm^3.

b) Se folosește teorema lui Pitagora.

$$\frac{1}{\left(\pi\frac{b^2c^2}{3a^2}a\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\pi b^2c}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\pi c^2b}{3}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{b^2c^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{b^2c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c^2b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^4c^4} = \frac{1}{b^4c^2} + \frac{1}{c^4b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 + b^2.$$

5. Este în fond un con circumscris unui triedru tridreptunghic (fig. R.13). Rezolvăm întîi punctul b) și particularizăm la a), după aceea.

Dacă notăm cu A vîrful conului, cu AB, AC, AD cele trei generatoare și cu h înălțimea conului, avem:

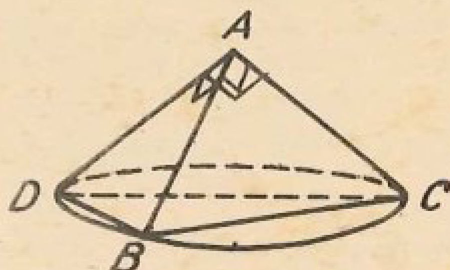


Fig. R.13

$$BC = r\sqrt{3},\ AC = r\frac{\sqrt{6}}{2},\ h = \sqrt{AC^2 - r^2} = \sqrt{r^2\cdot\frac{3}{2} - r^2} = r\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathcal{V} = \pi r^3\frac{\sqrt{2}}{6};\ \text{a)}\ \mathcal{V} = \pi 0{,}8^3\frac{\sqrt{2}}{6}\pi\text{m}^3 = \frac{0{,}256}{3}\pi\sqrt{2}\ \text{m}^3.$$

6. $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\mathcal{V} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$ (fig. R.14).

Caz particular $\mathcal{V} = \pi \frac{6^3\sqrt{6}}{27}$ cm³ $= 8\pi\sqrt{6}$ cm³.

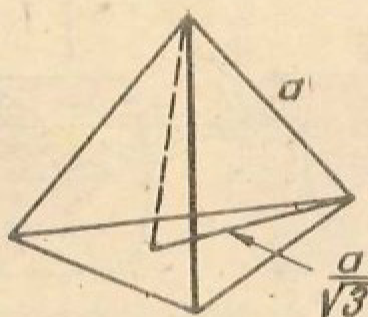


Fig. R.14

7. a) $2\pi ab = 2\pi ab$, arii laterale egale (fig. R.15);

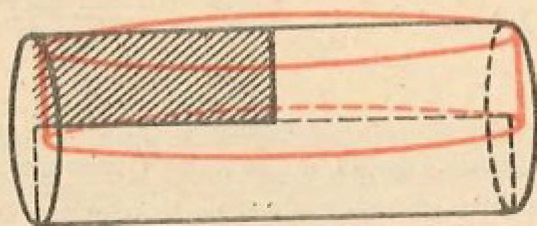


Fig. R.15

b) $\pi a^2 b$ se compară cu $\pi b^2 a$, evident, dacă $b > a \Rightarrow b^2 a\pi > a^2 b\pi$.

8. Cu notațiile din figura R.16 și calculînd cu teorema lui Pitagora înălțimea trapezului, se găsește $BC = 6$ cm.

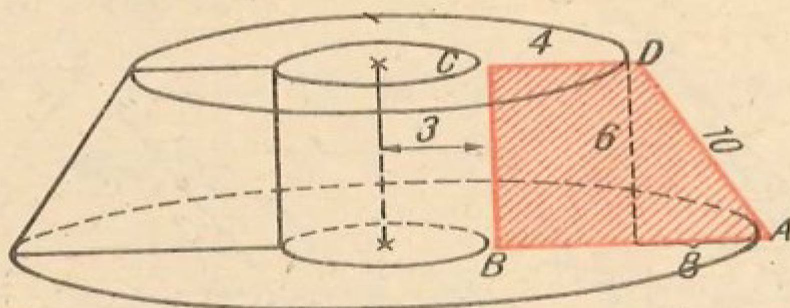


Fig. R.16

$\mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_{tot}$ a tr. de con $= \mathcal{A}_{\text{laterală a cilindrului}} - 2\mathcal{A}_{\text{bazei cilindrului}} =$

$= \pi 10(7 + 15) + \pi 7^2 + \pi 15^2 + 36\pi - 2\pi \cdot 9 = \pi(220 + 49 + 225 + 36 - 18) = 512\pi$ (cm²).

Pentru volum:

$\mathcal{V} = \mathcal{V}$ trunchiului de con $- \mathcal{V}$ cilindrului $= \pi \frac{6}{3}(15^2 + 7^2 + 15 \cdot 7) - \pi \cdot 9 \cdot 6 =$

$= 2\pi \cdot 379 - 54\pi = 758\pi - 54\pi = 704\pi$ (cm³).

9. $R = 3\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{V} = 18\pi \cdot 8\sqrt{2} = 144\sqrt{2}\,\pi$ (cm³).

10. $G = 10$ cm, $r = 5$ cm, $h = 5\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{V} = \frac{125}{3}\sqrt{3}\pi$ cm³.

11. Din cilindrul circumscris conului haşurat în figura R.17 a) lipseşte o treime, iar din cel din figura R.17 b) lipsesc două treimi, deci diferenţa de volum $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ este o

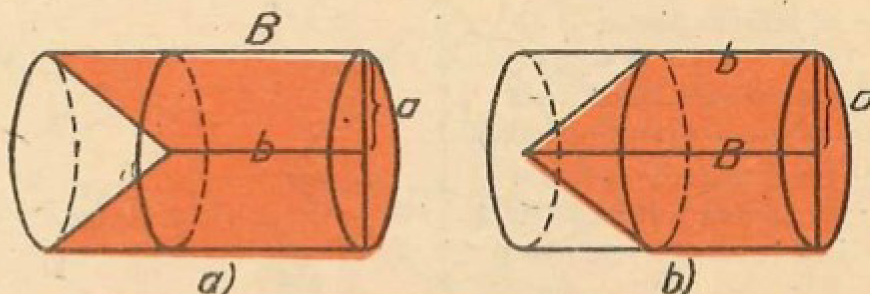


Fig. R.17

treime din cilindru (ca volum), deci un con $\cdot \frac{\pi(B - b)a^2}{3} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 \Rightarrow$

$B - b \Rightarrow \; = \frac{3(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)}{\pi a^2}$.

12. Rezolvăm punctul b) şi particularizăm apoi pentru $a = 6$ cm. Facem o secţiune axială în con, determinată de secţiunea diagonală $ACC'A'$ prin cub (fig. R.18). Notînd cu x latura cubului şi, ţinînd seama de asemănarea triunghiurilor SAC cu SPQ, obţinem:

$$\frac{x\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow x = \frac{2a}{3}, \mathcal{V} = \frac{8a^3}{27}.$$

În cazul a), unde $a = 6$ cm, $x = \frac{36}{9} = 4$ (cm), $\mathcal{V} = 64$ cm³.

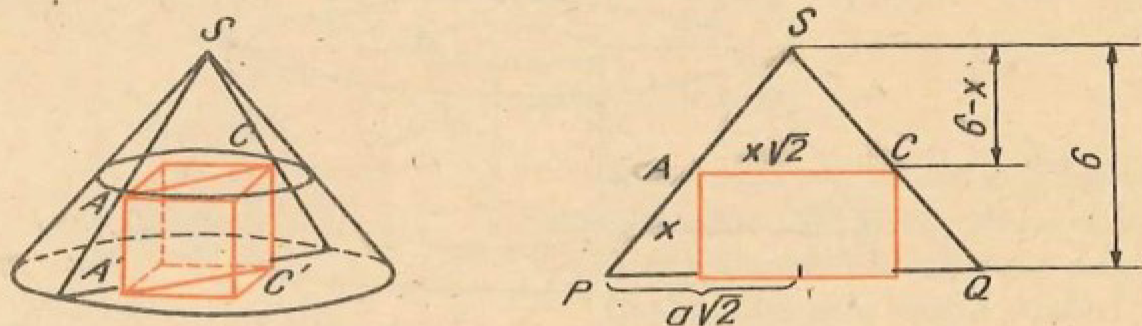


Fig. R.18

13. a) Raportul de asemănare dintre conul mic şi conul mare este $\frac{1}{4}$ (fig. R.19). Volumul conului mare este $\mathcal{V} = \frac{\pi}{3}\, 1024$ cm³, al conului mic $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{4^3} \cdot \mathcal{V} = \frac{\pi}{3} \cdot 16$ cm³, iar cel al trunchiului de con $\mathcal{V}_{tr} = \mathcal{V} - \mathcal{V}_1 = \frac{1\,024\,\pi}{3} - \frac{16\,\pi}{3} = 336\pi$ (cm³).

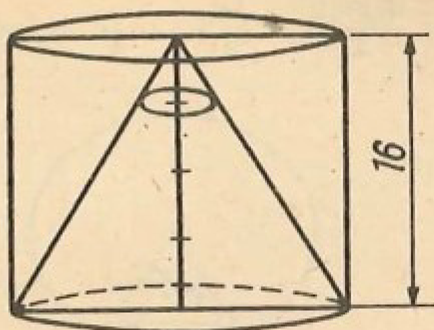


Fig. R.19

b) Raportul de asemănare între conul mic şi cel mare trebuie să fie, în acest caz, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Deci $\frac{h}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $h = 8\sqrt{2}$ cm şi distanţa de la bază va fi $16 - 8\sqrt{2} = 8(2 - \sqrt{2})$ cm. Se mai poate calcula şi direct, calculînd întîi aria laterală a conului mare etc.

14. $\mathcal{V}_{\text{trunchi}} = 29{,}792\pi$ cm^3; $\mathcal{V}_{\text{con}} = 2{,}592\pi$ cm^3; $\mathcal{V}_{\text{corp}} = 27{,}2\pi$ cm^3 (fig. R.20).

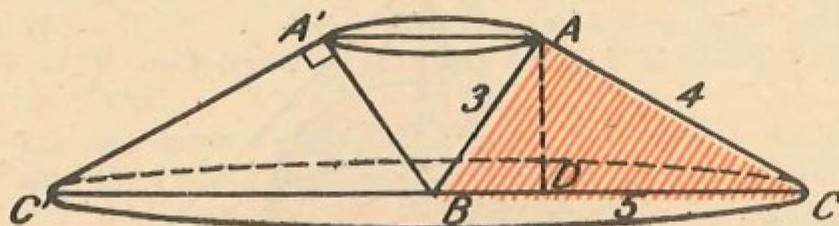


Fig. R.20

15. a) $\pi 10(R + r) = 220\pi$, duce la: $R + r = 22$, $r = \frac{4}{7}R$, deci $\frac{11}{7}R = 22$; $R = 14$ cm, $r = 8$ cm; $s = 64\pi$ cm^2, $S = 196\pi$ cm^2, $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 480\pi$ cm^2,
$\mathcal{V} = \frac{8\pi}{3}(196 + 64 + 14 \cdot 8)$ cm$^3 = 992\pi$ cm^3.

16. Din fig. R.21, rezultă: $r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$ m; a) $\mathcal{A}_{\text{sf}} = 4\pi \cdot 25 = 100\pi$ (m^2),

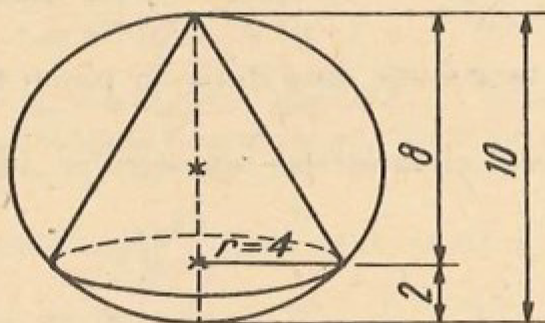


Fig. R.21

$\mathcal{V}_{\text{sf}} = 4\pi \cdot \frac{125}{3} = \frac{500\pi}{3}$ (m^3); b) $\mathcal{A}_{\text{con}} = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{80} + \pi \cdot 16 = 16\pi(1 + \sqrt{5})$ (m^2),
$\mathcal{V}_{\text{con}} = \frac{16 \cdot 8\pi}{3} = \frac{128\pi}{3}$ (m^3); c) $\mathcal{A}_1 = 2\pi \cdot 5 \cdot 8$ m$^2 = 80\pi$ m^2, $\mathcal{A}_2 = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 2$ m$^2 = 20\pi$m^2.

17. (Fig. R.22) $h_{cal} = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$, $\mathcal{A}_{cal} = 2\pi Rh = R^2(2 - \sqrt{3})\pi$.

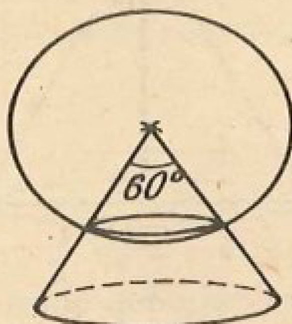


Fig. R.22

18. (Fig. R.23) Se exprimă volumul în două moduri:

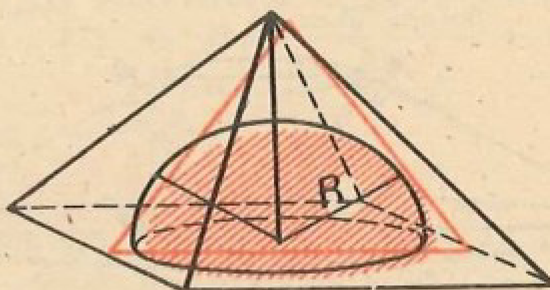


Fig. R.23

$$\mathcal{V} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \text{ şi } \mathcal{V} = 4\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{r}{3}, \text{ de unde: } \frac{a^2\sqrt{2}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot r,$$

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

19. Centrul sferei se află în planul mediator al coardei comune.

20. Vîrfurile unei fețe aparțin intersecției planului acelei fețe cu sfera, care este un cerc.

21. Punctele P, Q, B, A sînt pe intersecția sferei cu diametrul cît diagonala dreptunghiului, cu planul APQ.

22. Se folosește faptul că tangentele duse dintr-un punct la un cerc, coplanar cu el, sînt congruente.

23. MN este diametrul sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$.

PROBLEME RECAPITULATIVE (pagina 115)

1. 10 plane (se lasă, pe rînd, cîte două puncte în afara planului determinat de celelalte trei).

2. Dacă A, B, C, D sînt patru puncte necoplanare, D nu aparţie planului (ABC) Există drepte care trec prin D şi nu aparţin lui (ABC). Fie $d_1 \parallel AB$, deci d_1 nu este paralelă cu BC şi nici coplanară cu BC.

3. Considerăm problema rezolvată. Ne bazăm pe faptul că diagonalele unui paralelogram se înjumătăţesc. Deci, mijlocul M al segmentului AB este şi mijlocul lui CD. Simetrica lui d faţă de M va intersecta planul α în C. CM intersectează pe d în D. $ABCD$ este paralelogramul căutat.

4. a) Considerăm problema rezolvată. Planul determinat de d şi C conţine dreapta CD. Planul determinat de c şi D conţine şi el dreapta CD. Deci CD este intersecţia celor două plane.

Problema revine deci la a intersecta planul care conţine pe d şi este paralel cu AB cu cel care conţine pe c şi este paralel cu AD. Intersecţia lor va fi dreapta CD, iar punctele în care c şi d le înţeapă respectiv sînt punctele C şi D.

6. Se aplică teorema celor trei perpendiculare.

7. 60°.

8. a) Ştim că dacă două plane neparalele (în cazul nostru DAC şi NMQ) intersectează pe al treilea (ABC) după două drepte paralele, atunci şi intersecţia lor (NP) va fi paralelă cu aceste drepte. Deci $NP \parallel MQ$. Analog se arată că şi $MN \parallel PQ$; b) În triunghiul ABC: $\frac{AC}{MQ} = \frac{AB}{MB}$, $\frac{12}{MQ} = \frac{5}{5 - x} \Rightarrow MQ = \frac{12(5 - x)}{5}$. În triunghiul ABD: $\frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB}$, $\frac{MN}{7} = \frac{x}{5} \Rightarrow MN = \frac{7x}{5}$. $\mathcal{P} = 2(MQ + MN)$, $\mathcal{P} = \frac{2}{5}(60 - 12x + 7x)$, $\mathcal{P} = 2(12 - x)$.

9. a) Se calculează lungimile segmentelor $A'C'$, $B'C'$, $C'A'$ şi se aplică reciproca teoremei lui Pitagora; b) Se calculează lungimile segmentelor A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.

10. 9 cm.

11. a) Toate au lungimile $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, şi sînt înălţimi în triunghiuri dreptunghice congruente, ce au ipotenuza comună; c) $BT = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $TD' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; d) 60°.

12. a) $MC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\mathcal{V} = a^2\sqrt{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = 2a^3$; b) $\mathcal{A} = 2a \cdot \frac{5a}{2\sqrt{3}} : 2 = \frac{5a^2\sqrt{3}}{6}$; c) Nu. În triunghiul dreptunghic neisoscel $BAM\left(MB \perp AB,\ AB = a\sqrt{3}\ \text{şi}\ BM = a\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$, E este mijlocul ipotenuzei. Triunghiul BEM este isoscel, dar nu dreptunghic.

13. 38,3838 kg.

14. a) $MA = a\sqrt{2}$, $BC = a\sqrt{2}$; b) $AD \equiv BD$, $AD = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

15. a) $\mathcal{V} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 24\ (\text{m}^3)$ (perpendiculara din C' pe BC este înălțimea prismei); b) $\mathcal{A}_l = 8(\sqrt{3} + 4)\ \text{m}^2$.

16. a) Latura bazei mari este 8 cm, latura bazei mici este 5 cm. Se înlocuiește în formula volumului, $\mathcal{V} = 258\ \text{cm}^3$;

b) $\mathcal{V} = \frac{8^2 \cdot 16}{3}\ \text{cm}^3 = \frac{1\,024}{3}\ \text{cm}^3$; c) $\mathcal{A}_{l\,tr} = 39\sqrt{17}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_l = 64\sqrt{17}\ \text{cm}^2$.

17. a) Laturile congruente au lungimile de cîte 5 cm.
$\mathcal{A}_l = \pi RG = \pi 4 \cdot 5 = 20\pi\ (\text{cm}^2)$, $\mathcal{A}_t = 20\pi + 16\pi = 36\pi\ (\text{cm}^2)$;

b) $h = \sqrt{G^2 - R^2}$, $h = \sqrt{25 - 16}\ \text{cm} = 3\ \text{cm}$, $\mathcal{V} = \frac{4^2\pi \cdot 3}{3}\ \text{cm}^3 = 16\pi\ \text{cm}^3$;

c) $\mathcal{A}'_l = \frac{100\pi}{9}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}' = \frac{304\pi}{27}\ \text{cm}^3$;

d) $r_{sf} = \frac{4}{3}\ \text{cm}$, $\mathcal{A}_{sf} = 4\pi\left(\frac{4}{3}\right)^2 \text{cm}^2 = \frac{64\pi}{9}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}_{sf} = \frac{4\pi\frac{4^3}{3^3}}{3}\ \text{cm}^3 = \pi\left(\frac{4}{3}\right)^4\ \text{cm}^3$.

18. a) $r = 5\ \text{cm}$, $\mathcal{V} = 2\,600\pi\ \text{cm}^3$, $\mathcal{A}_t = 770\pi\ \text{cm}^2$; b) $H = 36\ \text{cm}$, $\mathcal{V} = 2\,700\pi\ \text{cm}^3$; c) Se află R din relația $(36 - R)^2 + 225 = R^2$, $R = \frac{169}{8}\ \text{cm}$.

19. a) $CC' \equiv AC$, $AC = 2\sqrt{2}\ \text{dm}$; b) $S_{BCC'} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ (\text{dm}^3)$, $S_{DCC'} = 2\sqrt{2}\ (\text{dm}^2)$, $S_{C'AB} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ (\text{dm}^2) = S_{ADC'}$, $\mathcal{A}_t = 4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\ \text{dm}^2$; c) $\mathcal{V} = 8\sqrt{2}\ \text{dm}^3$, $h = \frac{\mathcal{V}}{2\sqrt{2}}\ \text{dm}$, $h = \frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ \text{dm} = 4\ \text{dm}$.

20. a) $\widehat{AC} = 60°$, $\widehat{AB} = 120°$, $AC = R$, $AB = R\sqrt{3}$; b) $R^2\sqrt{3}$; c) 60°.

21. a) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; b) Unghiul este drept. Dacă un plan conține o dreaptă perpendiculară pe un alt plan, cele două plane sînt perpendiculare; c) 60°. d) $a\sqrt{3}$; e) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

22. a) $PQ = \frac{B - b}{2} = 4 \Rightarrow B - b = 8$ cm (fig. R.24), $BB'^2 = 100 - 64 = 36$, $h = 6$ cm, $100 = 8 \cdot B$, $B = 12{,}5$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $\mathcal{A}_l = 330\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V} = 510\ \text{cm}^3$; b) $BD = 7{,}5$ cm.

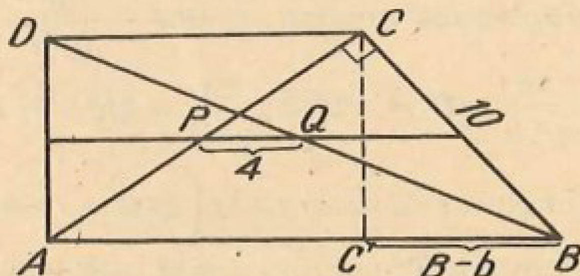


Fig. R.24

23. Dacă în triunghiurile dreptunghice ABC', ADC' şi $AA'C'$ înălţimile din vîrfurile unghiurilor drepte sînt concurente într-un punct T, situat pe ipotenuza comună AC', rezultă că înălţimile sînt congruente (teorema înălţimii). Fie x, y, z lungimile celor trei muchii ale paralelipipedului (fig. R.25), avem:

$$BT = \frac{x\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad DT = \frac{y\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad A'T = \frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

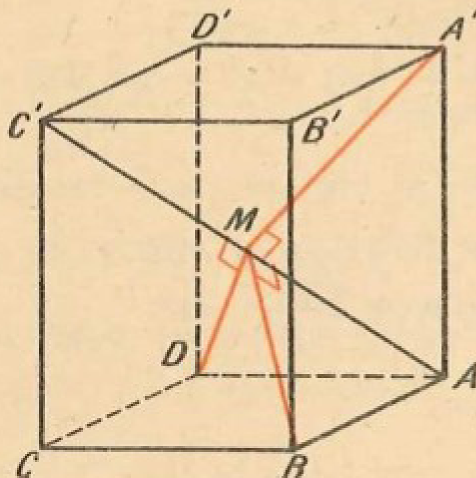


Fig. R. 25

Egalînd şi reducînd termenii asemenea, se obţine: $x = y = z$.

24. 30°, 60°, 90°, $BE = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{AD}{AE} = \frac{1}{3}$.

25. Triunghiul $A'NC'$ este echilateral. Înălţimea prismei este $h = 2a$, $\mathcal{V} = 2a^3$.

26. $a^2 + b^2 + 2ab = d^2 \Rightarrow d^2 = (a+b)^2$, $d = a + b$.

27. a) $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$; b) $S_{CVA} = \frac{a^2}{2}$, $S_{AVB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$$S_{CVB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad \mathcal{A}_l = \frac{(1+\sqrt{3})a^2}{2}.$$

28. a) $\triangle SPQ \sim \triangle SBC$, $\frac{PQ}{BC} = \frac{2}{3}$, $PQ = \frac{2a}{3}$, $QB \equiv PC$, $PC = \frac{a}{3}$, $\triangle APQ$ este isoscel. Înălţimea din A a triunghiului APQ este chiar înălţimea tetraedrului, deci este de $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $S_{APQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{9}$;

b) Se calculează volumul piramidei cu vîrful în A şi baza SPQ, care are aceeaşi înălţime ca şi tetraedrul dat, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $\mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

29. a) Se calculează lungimile proiecţiilor pe baza mare ale laturilor neparalele şi se deduce că unghiurile ascuţite au fiecare cîte 60°. Se calculează înălţimea trapezului şi apoi diagonala lui. Folosind reciproca teoremei lui Pitagora, se demonstrează că diagonalele sînt perpendiculare pe laturile neparalele;

b) Conform teoremei celor trei perpendiculare, $SO \perp (OAB)$ și $OA \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow SA \perp AB$;

c) $60°$;

d) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1A_1}{DA} = \frac{1}{2}$, $\frac{\mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{1}{4}$, $\frac{SO_1}{SO} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{v}{\mathcal{V}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1} \cdot SO_1}{\frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABCD} \cdot SO} = \frac{1}{8}.$$

30. a) 588 dm^3; b) $L = 15$ dm; c) $\mathcal{A}_l = 240$ dm^2; d) Distanța este jumătate din înălțimea trunchiului de piramidă.

31. a) $\mathcal{P} = 36$ cm, $\mathcal{A} = 42$ cm^2; b) $\mathcal{A}_c = 120\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 132\pi$ cm^3.

32. a) BT este înălțime în triunghiul SBC. b) Se obține un corp format din două conuri cu aceeași bază cu volumul $\frac{1\,200\ \pi}{13}$ cm^3.

33. a) $10\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ cm;

b) $\frac{500(2 + \sqrt{2})\pi}{3}$ cm^3.

34. a) $60°$ și $120°$; b) triunghiul ABD este dreptunghic; c) se obține un trunchi de con cu volumul de $\frac{109,375\sqrt{3}}{3} \cdot \pi$ cm^3.

35. $\mathcal{V}_1 = \frac{\pi h^2}{3}(2B + b)$, $\mathcal{V}_2 = \frac{\pi h^2}{3}(B + 2b)$. Volumul este mai mare în cazul a). Volumele nu pot fi egale.

36. Se duce o secțiune axială în con prin planul diagonal al cubului. Notăm cu x muchia cubului și, folosind asemănarea triunghiurilor, se găsește $x = \sqrt{2}$ cm. Volumul conului este $\mathcal{V}' = \frac{8\sqrt{2}\,\pi}{3}$ cm^3, iar cel al cubului $\mathcal{V}' = 2\sqrt{2}$ cm^3. Se verifică ușor că $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} < \frac{1}{4}$.

37. Fie $AB' = a$ și $\sphericalangle BA'B = u$. Conform uneia dintre reciprocele teoremei celor trei perpendiculare, $BC \perp AD$. Rezultă că în triunghiul echilateral ABC, D este mijlocul laturii BC ($BD \equiv BC$) (fig. R.26). În triunghiul dreptunghic $B'BA$, avem: $AB = a \cos u$ și $B'B = a \sin u$; în triunghiul echilateral ABC: $BD = \frac{a \cos u}{2}$; în triunghiul dreptunghic $AB'D$: $B'D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $B'BD$, obținem: $a^2\sin^2 u + \frac{a^2 \cos^2 u}{4} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$, sau: $\sin^2 u + \frac{\cos^2 u}{4} = \frac{1}{2}$. De unde: $4\sin^2 u + 1 - \sin^2 u = 2$ și $\sin u = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

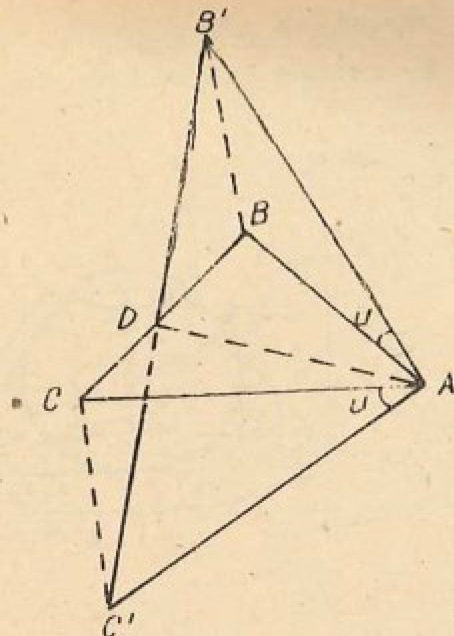


Fig. R.26

Altă soluție: Notînd $AB = x$, vom obține: $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $AB' = a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,

$\cos u = \frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

38. Fie $AA' = x$. Din triunghiul $AA'B : AB = x\sqrt{2}$, iar din triunghiul $CC'B : BC = 2x$. Folosim teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC: $BC^2 - AB^2 = AC^2$, $4x^2 - 2x^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = BA'$, $BC' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $CC' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

39. a) Se arată că proiecția unui punct de pe Oz — spre exemplu — pe planul xOy este egal depărtată de Ox și Oy; b) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

40. $\frac{3R}{5}$.

41. (Figura R.27). Atenție! La determinarea cantității de tablă nu adunați și aria bazei mari. Se obțin următoarele rezultate: $1\,250\pi$ cm² de tablă; $\frac{39\sqrt{3}\pi}{8}$ litri; 180°.

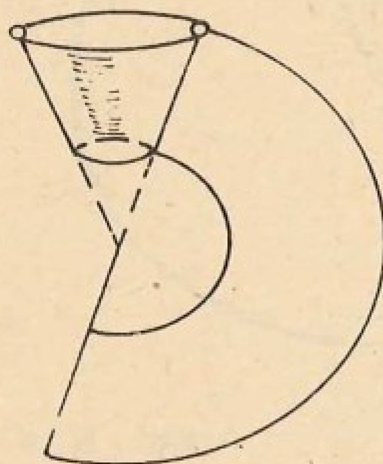


Fig. R.27

42. (Figura R.28). Se ţine seama că generatoarea este egală cu suma razelor şi se aplică teorema lui Pitagora. Se găseşte: $R = 3(\sqrt{2} + 1)$ cm, $r = 3(\sqrt{2} - 1)$ cm, $\mathcal{A}_l = 72\pi$ cm^2.

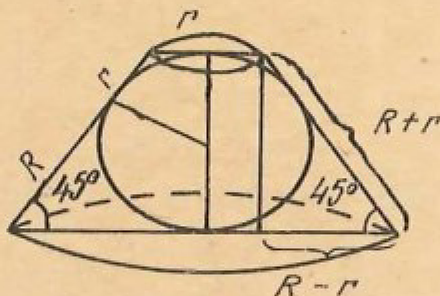
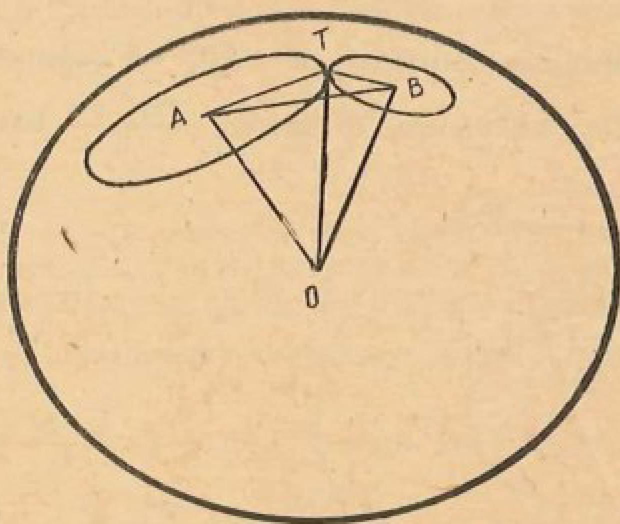


Fig. R.28

43. a) Raza bazei cilindrului este de 4 cm. Înălţimea calotei este de 2 cm, $\mathcal{A}_c = 16\pi$ cm^2; b) $\mathcal{A}_l = 48\pi$ cm^2; $\mathcal{V} = 96\pi$ cm^3.

44. a) $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 2$ cm, $BH = 3$ cm; b) $BD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm, $DE = \frac{8}{3}$ cm, $EC = \frac{2}{3}$ cm; c) Se obţine un cilindru reunit cu două conuri, avînd aceleaşi raze, $\mathcal{A} = \frac{2(1 + 3\sqrt{3})\pi}{3}$ cm^2.

45. Fie T punctul de pe sferă în care cele două cercuri sînt tangente, O centrul sferei şi A, B centrele celor două cercuri tangente (fig. R.29). Se demonstrează că patrulaterul $AOBT$ este inscriptibil, apoi se calculează AB ca sumă a proiecţiilor segmentelor AT şi BT pe AB. Se găseşte: $AB = \frac{b\sqrt{R^2 - a^2} + a\sqrt{R^2 - b^2}}{R}$.



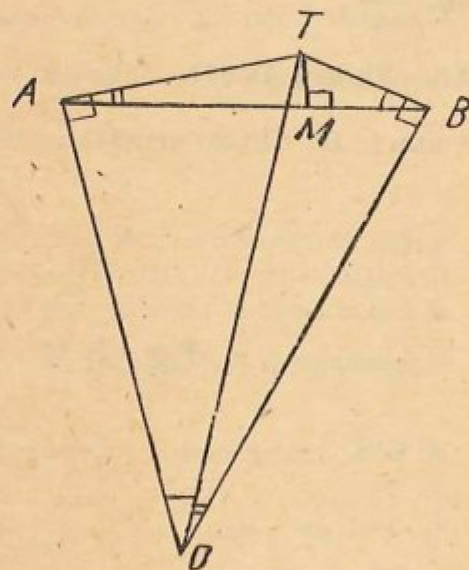


Fig. R.29

46. Punctul P este centrul sferei circumscrise conului (fig. R.30). Raza sferei este $R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$.

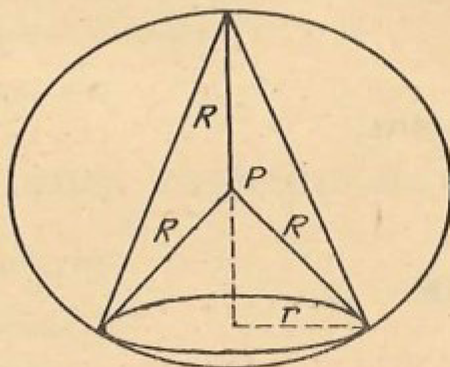


Fig. R.30

47. a) $4^2 \cos 60° = 8$ (cm²); b) Proiecția este un dreptunghi cînd una din laturile bazei este paralelă cu planul bazei. Proiecția este un romb atunci cînd o diagonală a pătratului este paralelă cu planul de proiecție.

Cuprins

